de Dinf. Auby

Math. P.
224 n

Hoffmann

<36604539210011

<36604539210011

Bayer. Staatsbibliothek

Geometrische Wissenschaftslehre,

eine

Anleitung

zum

leichten und gründlichen Studium der Geometrie,

von

Joh Jos. Ign. Hoffmann,

Königlich-Baierischem Hofrathe, Director des Königl. Lyceums zu Aschaffenburg, Professor der Mathematik und Physik am Königl. Lyceum, erstem Professor an dem Königl. Forst-Lehrinstitute, Mitgliede der Wetterauischen Gesellschaft für die gesammte Naturkunde, der Kaiserlich-Leopoldinisch-Carolinischen Academie der Naturforscher zu Bonn, der Senkenbergischen naturforschenden Gesellschaft zu Frankfurt am Main, der Gesellschaft zur Beförderung nützlicher Künste und deren Hülfswissenschaften daselbst, und der Herzoglich-Sachsen-Gothaischen und Meiningischen Societät der Forst- und Jagdkunde zu Dreisigacker.

Mit sieben Steintafeln.

Dritte, verbesserte und sehr vermehrte Auflage.

Mainz, 1826.

Bei Florian Kupferberg.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorbericht
zur ersten Auflage.

Meine im vorigen Jahre erschienene geometrische Anschauungslehre *) (Mainz, bei Florian Kupferberg, 166 S. 8., mit 7 Steintafeln) hat das Glück gehabt, bei Sachverständigen (worunter ich z. B. den verdienstvollen Kreisschulrath von Stephani in Ansbach und den scharfsinnigen Professor Ladomus in Carlsruhe nenne) vielen Beifall zu finden. Auch haben andere geprüfte Männer, welche sich derselben bei ihrem öffentlichen und privat Unterrichte bedienten, ihre Brauchbarkeit zur Erweckung und Schärfung des Anschauungsver=

---

*) Wovon im Jahre 1823 die dritte, sehr verbesserte und vermehrte Auflage herausgekommen ist.

mögens und zur Verstandesbildung der Jugend anerkannt.

Solche schmeichelhafte Beweise für den Nutzen dieser Lehrmethode ermunterten mich zur schnellern Ausarbeitung der in dem Schlußworte der Anschauungslehre erwähnten Elementargeometrie, welche ich dem gelehrten Publicum, unter dem Titel einer geometrischen Wissenschaftslehre, hierdurch übergebe.

Sie zerfällt in vier Cursus, welche: reine Elementargeometrie, rechnende Elementargeometrie, practische Elementargeometrie und Elementar-Trigonometrie heißen. Ihr näherer Inhalt ergibt sich aus der unten folgenden Uebersicht der Schrift.

Mein Zweck war, auf wenigen Bogen eine größere Summe geometrischer Wahrheiten vorzutragen, als es, nach dem sonst gewöhnlichen Plane, auch in größern Lehrbüchern zu geschehen pflegt. Kenner werden dies leicht finden,

und nach meiner Ueberzeugung soll eben diese Kürze zum Vortheile der Anfänger gereichen.

Wer nur die vier Rechnungsarten in ganzen und gebrochenen Zahlen wohl inne hat, ist zum zweckmäßigen Studium aller vier Cursus geschickt. Denn die, zum Verständnisse einiger Abtheilungen der Geometrie nothwendigen arithmetischen Hülfslehren sind gehörigen Ortes eingeschalten worden. Daher können schon Knaben von 8 — 10 Jahren diesem Unterrichte mit Nutzen folgen. Den Erwachsenen aber wird die Schrift bei ernstem Willen auch als Anleitung zum Selbststudium dienen. Eben darin besteht der unschätzbare Werth geometrischer Wahrheit, daß sie in Schülern jedes Lebensalters lebendiges Interesse erregt.

Jene, welche durch das Studium der geometrischen Anschauungslehre zur eigentlichen Geometrie vorbereitet sind, werden der Schrift mit Leichtigkeit und Sicherheit folgen. Unvorbereiteten kann sie wohl auch zum Leitfaden dienen; doch können ihre Fortschritte nicht so

schnell seyn, und der Lehrer muß ihrem ungebildeten Anschauungsvermögen oft zu Hülfe kommen.

Das Hauptziel aber, welches gegenwärtige Schrift erreichen soll, ist, daß die Geometrie auf eine ihrer würdige, rein geistige Weise, mit Vermeidung alles Mechanischen im Lehren und Lernen, betrieben werde. Nachfolgende Einleitung wird dieses ausführlicher darlegen. In den Händen sachkundiger, thätiger Lehrer wird das Werk diesen Zweck nicht wohl verfehlen.

Aschaffenburg, im März 1816.

Joh. Jos. Ign. Hoffmann.

Vorbericht

zur zweiten Auflage.

Bei dieser zweiten Auflage meiner geometrischen Wissenschaftslehre, welche in dem kurzen Zeitraume von zwei Jahren nöthig wurde, muß ich bemerken, daß die Schrift nicht nur auf das Sorgfältigste durchsehen und verbessert, sondern auch hin und wieder bedeutend vermehrt worden ist. Eine Vergleichung derselben mit der ersten Auflage wird dieses beweisen. Auch wurden in den Steintafeln mehrere Fehler berichtigt.

Zugleich benütze ich diese Gelegenheit, jenen, Schul-Vorstehern und Lehrern, welche dieses Werkchen in Ihrem Wirkungskreise als Lehrbuch eingeführt haben, hierbei meinen öffentlichen Dank zu erstatten. Durch Ihre fernere thätige Mitwirkung darf man hoffen, daß die geometrische Wissenschaftslehre immer mehr zur Verbreitung eines gründlichen Studiums der Elementargeometrie beitragen werde

Noch zeige ich hier an, daß in dem Verlage gegenwärtiger Schrift baldigst eine: Stereometrische Anschauungs- und Wissenschafts-Lehre in einem Bande erscheinen wird; so, daß diese, in Verbindung mit meiner geometrischen Anschauungs- und Wissenschafts-Lehre, ein Ganzes bildet, welches aus drei Bänden besteht, und die Elemente der gesammten Raumlehre umfaßt *).

*) Dieses Lehrbuch der Stereometrie ist im Jahre 1820 erschienen.

Aschaffenburg, im December 1818.

Joh. Jos. Ign. Hoffmann.

Vorbericht

zur dritten Auflage.

Bei Besorgung dieser dritten Auflage habe ich mit Vergnügen einigen, mir mehrfach zugekommenen Wünschen entsprochen.

Für's Erste sind die Beweise, welche in den frühern Auflagen meist nur sehr kurz oder kaum angedeutet waren, nunmehr theils vollständig, theils so ausgeführt worden, daß die beigefügten Citate auf die frühern Hülfssätze hinweisen. Hierdurch wird dem Lehrer das Lehren; dem Anfänger der Geometrie aber das Studium derselben erleichtert, ohne daß es dem Erstern an Stoff zu Erläuterungen, dem Letztern an Stoff zum Selbstdenken fehlte.

Für's Zweite ist dem Cursus der Elementar-Trigonometrie, welche auch hier wieder zuerst aus der Lehre von den Sehnen abgeleitet wurde, in 32 §§. ein neuer Abschnitt beigefügt worden, worin die trigonometrischen Sätze aus den Begriffen der Sinusse, Tangenten, Secanten u. s. f. abgeleitet und durch wirklich berechnete Beispiele erläutert werden.

Diese bedeutende Vermehrung der Schrift hat eine neue Tafel mit Zeichnungen (die VIIte.) nöthig gemacht.

Auch ist die Sehnen-Tafel, welche in den frühern Auflagen diese Linien nur für jeden Viertelsgrad nach dem Durchmesser = 100000 angege-

ben hatte, nunmehr so erweitert worden, daß sie dieselben von 5 zu 5 Minuten für den Durchmesser = 10000000 darstellt. Da hierdurch auch die Sinusse dieser Winkel für den Halbmesser = 10000000 gegeben sind, so kann diese kleine Tabelle den Anfängern der Trigonometrie zugleich als Sinus-Tafel dienen, nach welcher sodann auch die Tangenten, Secanten u. s. w. berechnet werden können, wozu die nöthige Anleitung gegeben wird.

Damit für öffentliche Lehranstalten, worin die Schrift als Lehrbuch gebraucht wird, die früheren Auflagen durch diese neue nicht unbrauchbar werden, ist die Zahl der §§. beibehalten worden, wodurch ihre Uebereinstimmung im Ganzen nicht gestört wird und auch die Citate nichts an ihrem Werthe verlieren. Die im Texte und in den Tafeln entdeckten Fehler sind sehr sorgfältig verbessert worden.

In diesen Bemühungen des Verfassers und in der Bestimmung des Hrn. Verlegers, nach welcher, der bedeutenden Vermehrung ungeachtet, die Schrift ihren seitherigen geringen Preiß behält, mögen die Herrn Studien-Vorstände und Lehrer, welche dieselbe als Leitfaden eingeführt haben, einen Beweis jenes Dankes erkennen, zu welchem man sich, in Hinsicht Ihres thätigen Mitwirkens zur Verbreitung gründlicher Kenntnisse verpflichtet fühlt.

Aschaffenburg, im October 1825.

Joh. Jos. Ign. Hoffmann.

Einleitung.

I. Quelle der Geometrie.

Das Urpostulat der Geometrie heißt: Es gibt einen allseitig ausgedehnten, sich ins Unendliche erstreckenden Raum, an welchem man die drei Hauptrichtungen nach Länge, Breite und Tiefe erkennt. Wem die Vorstellung dieses Raumes fehlte, der müßte auf die Lehren der Geometrie Verzicht leisten. Aber sie ist allen Menschen, als etwas Gesetzmäßiges angeboren, und so wird jeder zu den Erkenntnissen der Raumlehre fähig. Vergebens bemüht man sich, die Natur des Raumes, nach den Regeln der Logik, zu erklären. Denn was dem menschlichen Geiste ursprünglich als etwas höchst Einfaches gegeben ist, kann keine logische Analyse in einfachere Elemente zerlegen. Immer wird der Theil mit dem Ganzen, und dieses mit jenem wiederum als Einerlei erscheinen. Daher drehen sich die Erklärungen: der Raum ist das Aussereinandersenn der Dinge; oder Dasjenige, was sich nach der Länge, Breite und Tiefe erstreckt; oder Jenes, worin sich alle physische Körper befinden, und alle übrige, immer im Kreise herum.

Aber wie, könnte man fragen, ist eine strenge Wissenschaft möglich, welche in einem nicht mehr streng zu erklärenden Postulate gegründet ist? Wird sich nicht dieser Mangel einer logischen Begründung des Ursatzes auf alle abgeleitete Lehren übertragen? — Der Einwurf schwindet, wenn man erwägt, daß der Zweck logischer Erklärungen die Klarheit der zu erklärenden Begriffe ist, und da nicht mehr beabsichtiget zu werden braucht, wo das zu Erklärende schon an sich selbst mit dem höchsten Grade von Klarheit gegeben ist. Daß dies der Fall bei der Vorstellung des Raumes ist, weiß Jedermann aus eignem Selbstbewußtseyn. Und eben hierin erblicken wir die Quelle der vollkommenen Evidenz, welche den Lehren der Geometrie eigenthümlich ist, worin sie alle andere strenge Wissenschaften, in dieser Hinsicht, weit hinter sich zurückläßt. Die Grundlehren der Logik z. B. erkennt man mit gleicher Gewißheit, als die Fundamentalsätze der Geometrie; allein es fehlt ihnen der hohe Grad von Faßlichkeit, der uns in den geometrischen Wahrheiten so erfreulich entgegentritt. Nur überzeugende Gewißheit, mit ergreifender Faßlichkeit gepaart, erzeuget die höchste Vollkommenheit menschlicher Erkenntnisse: die Evidenz.

Da nun das geometrische Denken nur eine Gattung des menschlichen Denkens überhaupt ist, so folgt unwidersprechlich, daß die Allgemeinheit und Nothwendigkeit der geometrischen Lehren in den höchsten Gesetzen des Denkens begründet sei. Ihre Gewißheit geht daher aus der Unabänderlichkeit

jener Gesetze hervor. Allein wo findet sich der Grund ihrer Faßlichkeit? Nach meiner Ueberzeugung lediglich in der ungemeinen Klarheit unserer Vorstellung vom Raume überhaupt und von Körpern, Flächen und Linien. Das Feld dieser Anschauungen ist der classische Boden des Geometers. Durch Anwendung der Grundgesetze des Denkens auf diesen reichhaltigen Stoff errichtet er sein festes, dem Auge des Geistes so wohlgefälliges Gebäude. Verläßt er diesen fruchtbaren Boden und schweifet in das (oft so leicht schwankende) Reich der Begriffe, so entfernt er sich von dem ächt geometrischen Geiste und vergibt der Wissenschaft ihren eigenthümlichen Grundcharacter: die Evidenz. Dies bestätigt vielfältig die Geschichte. Warum fand z. B. Wolfs Begriff und Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke; warum so manche, übrigens mit vieler Gründlichkeit ausgeführte Lehre von den Parallellinien, welche sich auf bloße Begriffe und nicht auf bestimmte Constructionen im Raume gründet, bei den strengen Geometern keinen Beifall? — Einzig wegen dieses verfehlten Wegs der ächt geometrischen Darstellung. Leicht ließ sich die Zahl dieser Beispiele vermehren. — Nach dem letzten Grunde der Evidenz dieser Elementar-Anschauungen mögen die Metaphysiker forschen. Ihre etwaigen Controversen treffen aber den Geometer nicht; denn die geometrische Evidenz ist eine eben so unläugbare Thatsache, als es z. B. das Factum des Bewußtseyns überhaupt ist.

II. Inhalt und Zweck einer geometrischen Anschauungslehre.

Der Lehrvortrag jeder Wissenschaft muß ihrer Natur verhältnißmäßig seyn. Ihre Natur wird aber aus der Quelle erkannt, woher sie entspringt. Diese Urquelle ist für die Geometrie das Anschauungsvermögen des Raumes und der räumlichen Elementar-Objecte. Daher muß die Lehrmethode dieser Wissenschaft mit diesen Grundanschauungen beginnen, und dieselbe von ihrer höchsten Einfachheit, in lückenloser Stufenfolge, bis zu ihren wichtigsten Zusammensetzungen fortführen. Dieses systematisch geordnete Ganze ist aber noch keine geometrische Wissenschaft, sondern eine geometrische Anschauungslehre, d. h. eine nöthige Propädeutik zur eigentlichen Geometrie. Sie muß der allmähligen Entwickelung der menschlichen Natur-Anlagen folgen, und, gleich diesen, langsam und sicher fortschreiten. So wie die Erkenntniß des Kindes mit der Anschauung des Physischen im Raume beginnt und sich nach und nach erst zu Begriffen ausbildet, so müssen auch diese geometrische Anschauungen zuerst nur sinnlich angeregt, und, nach vielseitig gebildetem Anschauungsvermögen, allmählig zum reingeistigen gesteigert werden. Diesen Stufengang lehrt uns die Natur. Wer aber dieser Lehrerin folgt, bildet sich selbst zum tüchtigsten Lehrer.

Vorstehende Grundsätze habe ich mich bemüht, in der oben (Vorber. z. erst. Aufl.) angeführten geo-

metrischen Anschauungslehre practisch durchzuführen. Sie zerfällt in vier Cursus. Der erste ist den einfachsten Anschauungen geometrischer Gegenstände gewidmet, welche in wirklichen Zeichnungen auf der Schultafel dem Schüler vor's Auge gebracht werden. Dieser Cyclus beginnt mit der Anschauung des Puncts, der geraden und krummen Linien, der ungleichen und gleichen geraden Linien, der zusammenlaufenden, auseinanderlaufenden und gleichlaufenden Linien, geht sodann zu den verschiedenen Winkeln, Dreiecken, Vierecken und Vielecken über, und wird durch die Betrachtung des Kreises und der merkwürdigsten Linien in ihm und um ihn abgeschlossen. Hierbei ist durchaus von keinen wissenschaftlichen Erklärungen die Rede; aber alles muß sehr aufmerksam beschaut werden. Sind einmal diese Anschauungen recht klar und lebendig, so ist es leicht, sich von dem sinnlich Wahrgenommenen zu dem rein Geistigen zu erheben.

In dem zweiten Cursus wird der Anfänger zur bequemen Bezeichnung der ihm nun schon geläufig gewordenen Anschauungen des ersten Cursus angeleitet. Diese geschieht durch die Buchstaben des lateinischen Alphabets, und es ist, zur Abkürzung des geometrischen Vortrags durchaus nothwendig, sich mit diesem Gegenstande vertraut zu machen. Auf solche Weise wird der zweite Cursus zugleich eine Wiederholung des erstern. Ausserdem aber werden an die schon klar gewordenen, früheren Anschauungen wieder neue geknüpft, welche dem Zöglinge des

ersten Cursus nicht faßlich genug gewesen seyn würden; nun aber mit großer Leichtigkeit aufgefaßt werden können. Auch hier kommen keine Erklärungen vor, sondern die gesammte Kenntniß überschreitet noch nicht den Kreis des Anschauungsvermögens.

Der dritte Cursus ist dem allmähligen Uebergange vom Sinnlichen in das Geistige gewidmet. Hier wird das Gebiet der geometrischen Elementar-Anschauungen noch vollends abgeschlossen, und der Schüler zugleich angeleitet, sich vom Einzelnen zum Allgemeinen zu erheben, um hierdurch in den Besitz scharf bestimmter Begriffe zu gelangen. Diese wichtige Operation des Geistes wird nun sehr leicht, da ihm das Material dazu mit so großer Klarheit vorschwebt. Nun werden durchaus befriedigende Erklärungen verlangt, wodurch Bildung des Verstandes und scharfe Sprachkraft in gleichem Grade erreicht wird. Vorzüglich tritt hierbei der wichtige Unterschied zwischen Sach- und Wort-Erklärungen hervor, woraus der Anfänger beurtheilen lernt, was das einfache Raisonnement über diese Uranschauungen vermöge, und was der eigentlichen Wissenschaft annoch zu berichtigen vorbehalten bleibe.

Der vierte Cursus erklärt die mathematischen Abkürzungszeichen, handelt ausführlich von den Grundsätzen und Forderungen, und schlieset mit Angabe des Begriffs, der Hauptheile und der Methode der Mathematik; so, daß der Schluß dieser Anschauungslehre zugleich den Anfang der Elementarlehren der Geometrie bildet.

III. Verhältniß der geometrischen Anschauungslehre zu dem Unterrichte.

Man kann das Verhältniß der Schrift zu den Volksschulen, zu den Gymnasien, zu den Lyceen und Universitäten, zu den Normalschulen, zu den Kunstschulen und zu dem Privatunterrichte betrachten. Jedes dieser Verhältnisse soll kürzlich erwogen werden.

A. Verhältniß zu den Volksschulen.

Die Elemente einer tüchtigen Volksbildung sind: Weckung und Ausbildung des religiösen und moralischen Gefühls, Uebung der Verstandeskraft, und Sorge für Gesundheit, Stärke und Gewandtheit des Körpers. Das Zweite wird bei den Kleinen am kräftigsten durch Sprachbildung und durch die geometrische Anschauungslehre erreicht. Wie überhaupt in dem Menschen das Sinnliche zuerst erwacht und sich allmählich zum Geistigen fortbildet, so bringt auch diese Lehre eine Fülle von räumlichen Anschauungen zur Betrachtung, entwickelt dieselbe, und sucht sie sodann in scharfe Begriffe zu fassen. Anschauungs-Vermögen, Sprachkraft, Verstand werden hierdurch kräftig gebildet. Diese Bildung aber thut Jedem Noth, er mag sich dem Ackerbau oder den Handwerken, den Künsten oder den Wissenschaften widmen. So wird die Anschauungslehre höchst bedeutend für ächte Volksbildung, welche selbst wiederum von größter Bedeutung für die innere

Kraft der Staaten ist. Daher soll in jeder Landschule diese geiststärkende Lehre ernstlich geübt werden. Im Laufe von zwei Jahren kann sie, bei vier Wochenstunden, vollkommen durchgeführt und gehörig wiederholt seyn. Der Lehrer muß das Buch besitzen, und sich durch Privatstudium mit dessen Geist und Methode vertraut machen, was Jedem, der zum Lehramte überhaupt Beruf fühlt, sehr leicht werden wird. Die Schulkinder brauchen die Schrift nicht zu haben; Bemittelte mögen sich solche wohl anschaffen. Aber der Lehrer lasse jeden Schüler auf sein kleines Schiefertäfelchen alle Zeichnungen nachbilden, die er an der Schultafel zur allgemeinen Anschauung bringt. Dieses bildet den Geist, übt den Blick und die Hand, schärft das Augenmaß und ist eine wirksame Vorübung zur freien Handzeichenkunst. Da sich in den Landschulen Kinder von höchst verschiedener Anlage versammeln, so muß der Lehrer auf das Bedürfniß der ganzen Schule sehen, und nur allmählich, aber sicher, in dem Unterrichte fortschreiten. Daher sind ihnen häufige Wiederholungen sehr zu empfehlen. Beherzigt er diese Winke, so wird er in der Lust, womit die Kleinen an der Lehre Theil nehmen, und in ihren raschen Fortschritten reichhaltigen Lohn für seine Bemühung finden.

B. Verhältniß zu den Gymnasien.

Religionsunterricht, Sprachstudium und Mathematik sind die Grundpfeiler einer ächten Gymna-

sial-Bildung. Besonders erkennt man wieder in unsern Tagen den wichtigen Einfluß der Mathesis auf Entwickelung und Erhöhung der Verstandeskraft. Aber nicht durch jede Lehrmethode wird dieser wichtige Zweck erreicht. Nur der wissenschaftlich-mathematische Vortrag stärkt und erhebt den Geist, der mechanische schwächt und unterdrückt ihn. Vorzüglich tritt die Geometrie als kräftige Geistesgymnastik hervor. Sie vereiniget erfreuliche Klarheit mit strenger Gewißheit. Aber sie muß ein sicheres Fundament haben, worauf sie ruhet und mit Leichtigkeit aufgeführt werden kann. Dies ist die geometrische Anschauungslehre, die es sich zur Aufgabe macht, zwischen den ins Unendliche gehenden Combinationen räumlicher Objecte, und zwischen ihrer allzubeschränkten Darstellung ein zweckmäßiges Mittel zu halten. Ihr Vortrag findet daher an jedem Gymnasium, als Einleitung zum Studium der Geometrie, ihre schicklichste Stelle in jener Classe, mit welcher im nächstfolgenden Schuljahre die eigentliche Geometrie begonnen wird. Bei zwei Wochenstunden ist ein Jahr hinreichend, um sie mit Nutzen durchzuführen. Da die Gymnasialschüler bereits in freier Geistesbildung einige Fortschritte gemacht haben, so muß der Vortrag der Anschauungslehre diesem Standpuncte entsprechen. Der Lehrer bringt alle Anschauungen des ersten Cursus nach und nach auf die Schultafel, benennt sie, und läßt solche von einzelnen Schülern wiederholen. Das Zugleichantwor-

ten der Classe wäre hier störend; aber da Jeder der Frage gewärtig seyn muß, so bleiben alle Schüler in gespannter Aufmerksamkeit. Dieser examinatorische Vortrag muß sich durch sämmtliche Cursus erstrecken, und wird der Lehre selbst Lebendigkeit und Theilnahme gewähren. Vorzüglich sehe der Lehrer auf Sprachrichtigkeit der Antworten seiner Schüler; besonders in dem dritten und vierten Cursus, welche den Verstand mehr, als die Anschauungskraft in Anspruch nehmen. Zweckmäßig ist es, wenn jeder Schüler die auf der Schultafel erblickten Zeichnungen entweder in einem besondern Hefte oder auf einer Schiefertafel selbst nachbildet. Auch sollen Alle das Lehrbuch besitzen, weil das Nachlesen des Vorgetragenen durchaus erfoderlich ist. Hat nun der Lehrer das nöthige Lehrtalent (ohne welches kein Unterricht gedeiht), so wird er mit Freude die Fortschritte seiner Schüler erblikken, und diesen geometrischen Vorübungen sodann die eigentliche Geometrie folgen lassen.

C. Verhältniß zu den Lyceen und Universitäten.

Lyceen und Universitäten haben den wichtigen Beruf, die Keime gelehrter Bildung zur Blüthe und segensreichen Frucht zu erziehen. Das Studium der Mathesis wird hierzu einen wirksamen Beitrag liefern, und insonderheit die Geometrie. Der Lehrplan verschiedener Lyceen ist aber verschieden. Wird das gründliche Studium der Geometrie

hier erst begonnen, so findet die Anwendung der geometrischen Anschauungslehre gerade so, wie bei den Gymnasien statt. Sollen aber die geometrischen Grundlehren für Lyceisten oder Academiker vorgetragen werden, welche bereits in der mathematischen Bildung etwas fortgeschritten sind, so wird die Anschauungslehre, als Einleitung zur Geometrie, von dem Lehrer nach dem Hauptinhalte jedes Curses kürzlich durchgeführt, welches, bei vier Wochenlectionen, nur eine Zeit von höchstens sechs Wochen erfodert. Auch wird solchen gebildeten Schülern, der strengen Lehrmethode wegen, diese Propädeutik schon deshalb erfreulich seyn. Es wird sich daher weder der academische Lehrer, noch der academische Schüler dieser Anschauungslehre auf der hohen Schule zu schämen haben, sobald Jener einmal die Elementargeometrie vortragen, Dieser aber sie studieren will. Zum Leitfaden dieser Elemente dienet sodann meine geometrische Wissenschaftslehre, welcher das Streben nach rein geistiger Behandlung der Geometrie zum Grunde liegt, ohne das practische Bedürfniß gänzlich davon auszuschließen.

D. Verhältniß zu den Normalschulen.

In den Normalschulen sollen tüchtige Volksschullehrer gebildet werden. Will aber der Lehrer diesem wichtigen Zwecke entsprechen, so muß er die nöthige Sachkenntniß mit einer guten Lehrmethode vereinigen. Letzteres ist so unentbehr-

lich, als Ersteres. Was nützt des Lehrers eigenes Wissen, wenn er nicht die Gabe besitzt, dem jugendlichen Geiste Theilnahme einzuflößen, ihn kräftig zu wecken, und sicher zu leiten? Sein Geist muß die Schüler durchdringen, um Aehnliches in ihnen hervorzurufen. Wie vermag dies ein Lehrer, der die Individualität des Schülers verkennt? Dieser individuellen Anlage, mit steter Hinsicht auf die Natur des Lehrgegenstandes in dem Vortrage folgen, heißt mit Zweckmäßigkeit lehren. Ausser einem natürlichen Talente kann der Lehrvortrag durch Studium und besonnene Uebung in hohem Grade vervollkommnet werden. Zu diesem Zwecke ist Normalschülern die geometrische Anschauungslehre vorzüglich wichtig. Hier lernen sie das Wesen und die Grundzüge einer strengen, vom Einfachen allmählich zum Zusammengesetzten fortschreitenden und durchaus im leicht faßlichen Kreise des Anschaulichen sich bewegenden Methode kennen; sie erhalten Anleitung zu den so höchst nöthigen catechetischen Uebungen, und wenn sich mit dieser theoretischen Bildung später noch die practische Fertigkeit verbindet, so ist in ihnen der Grund zu einem tüchtigen Schulmanne gelegt, der seinem hohen Berufe immer näher rücken wird. Es bedarf kaum einer Erinnerung, daß diese Anschauungs-Uebungen sich nicht bloß auf einseitige Schärfung des geometrischen Blickes beschränken, sondern daß aus ihnen der Keim zu jeder naturgemäßen Lehrmethode hervorgeht. Denn gleichwie es nur einen menschlichen Geist gibt, so folgt der-

selbe auch nur einem Entwickelungs- und Bildungsgesetze. Wer demnach dieses einmal erkannt, und sich angeeignet hat, bleibt auf immer in dessen Besitze, um solches auf höchst mannigfaltige Weise, in der Wissenschaft wie im Leben, wiederum zu benützen. Sind einmal die Normalschüler durch die geometrische Anschauungslehre kräftig vorbereitet, so wird in Vielen die edle Begierde zur eigentlichen Wissenschaftslehre geweckt, und sie dadurch ermuntert werden, das Gebiet der Geometrie mit Nutzen zu betreten.

E. Verhältniß zu den Realschulen.

Die Realschulen oder höhere Bürgerschulen sollen den Uebergang aus den Elementarschulen in das bürgerliche, Handel- oder Gewerbtreibende Leben vermitteln, und den Schüler mit jenen Hülfskenntnissen vertraut machen, ohne welche er sich dereinst nicht über das blos Mechanische erheben würde. Arithmetik und Geometrie stehen, in ihren mannigfaltigen Anwendungen, hierbei oben an. Vorzüglich wird die geometrische Anschauungslehre, ausser ihrem wohlthätigen Einflusse auf die Verstandesbildung überhaupt, zur Schärfung des Anschauungsvermögens ungemein wirken, und dem künftigen Gewerbsmanne jenen scharfen Blick und jenes geübte Augenmaß verleihen, welche in allen practisch-technischen Anwendungen von so großer Wichtigkeit sind.

F. Verhältniß zu den Kunstschulen.

Alle Raumkünste, z. B. Zeichenkunst, Malerei, die bildenden Künste, beruhen auf Linien, Flächen, Körpern, und ihren verschiedenen Combinationen. Nur mit einem gebildeten Anschauungsvermögen wird der Künstler in seinem Fache leichte und sichere Fortschritte machen. So erscheint also die geometrische Anschauungslehre, besonders wenn sie mit practischen Uebungen der Schüler verbunden wird, als sehr nützliche Propädeutik zur Zeichenkunst und Malerei. Die Perspective- und Zeichnung der Grundrisse und Aufrisse steht ohnedies in engster Verbindung mit ihr. Körperliche Raumkünste (die plastischen) erfodern natürlich auch eine körperliche Anschauungslehre zur Vorbereitung. Mit Recht sagt Hr. Hofrath Ladomus (in seiner zur höhern Bildung der Verstandes- und Anschauungskraft vorzüglich zu empfehlenden, kürzlich erschienenen, trefflichen Lehre von den Kegelschnitten S. XXIII,) « vis technica aller technischen Künste ist und bleibt einmal die Mathematik, und wie das Gerippe so zu sagen der Träger von der Schönheit des menschlichen Körpers, so ist und bleibt die Mathematik die Grundlage für die Raumkünste. » Auf welche Weise die Anschauungslehre diesen technischen Künsten zur Hülfslehre dienen kann, muß aus der Anlage und Bildung, so wie auch nach dem Zwecke des Schülers, ermessen werden.

G. Verhältniß zu dem Privatunterrichte.

Die Anwendung der geometrischen Anschauungslehre bei dem Privatunterrichte geht aus dem verschiedenen Zwecke hervor, welchen man durch diesen Unterricht zu erreichen strebt. Für Knaben, welche, ohne sich dem gelehrten Stande zu widmen, eine blos allgemeine Bildung genießen sollen, befolgt sie den Lehrplan für den Volksunterricht. Will sich der Zögling zum Künstler oder zum denkenden Handwerker bilden, so dient ihm die Anschauungslehre als theoretisch-practisches Hülfsmittel zur Leitung und Anwendung seines Talentes. Bei Knaben, welche sich späterhin dem Studium ernster Wissenschaften widmen, muß die Lehrmethode jener an Gymnasien folgen. Jünglinge und junge Männer genießen diesen Unterricht nach ähnlichen Abstufungen; nur mit dem Unterschiede, daß der Lehrer auf den höhern Grad von Ausbildung dieser reifern Schüler verständige Rücksicht zu nehmen hat. Doch darf nichts, so elementar und allbekannt es auch scheinen mögte, übergangen, sondern Alles muß, nur in größerer Kürze, durchgeführt werden. Diese Lückenlosigkeit ist wesentliches Erfoderniß des systematischen Vortrags und nur durch ununterbrochenes gründliches Fortschreiten kann der Geist des Schülers, er sei Kind, Knabe oder Mann, kräftig gebildet werden. Bei diesem Privatunterrichte tritt noch der Vortheil ein, daß die Anschauungsobjecte auf eine kleine Schiefertafel gezeichnet, leicht in jede veränderte Lage gebracht und von dem Schüler bequem nachgebildet werden können.

IV. Lehr-Vortrag der Geometrie für gelehrte Bildungsanstalten.

Hier ist nun der Ort, ein paar Worte über den Vortrag der eigentlichen Geometrie an gelehrten Schulen zu sprechen. Dies scheint um so wichtiger, als es bloß von der Art des Vortrags abhängt, daß diese Wissenschaft bald zu der nützlichsten und angenehmsten Unterhaltung, bald aber zur Plage und Geisel der Schüler wird. Der Lehrer erfasse nur zuvor selbst den wahren Sinn der Mathesis, er überzeuge sich, daß diese Lehre, aus dem Geiste entsprungen, auch nur einer rein geistigen Behandlungsweise fähig sei. Er beherzige wohl, daß die Geometrie nicht in einer Zusammenstellung empirischer Thatsachen bestehe, welche man dem Gedächtnisse einzuverleiben hat, sondern daß ihre Wahrheiten das ächte Gepräge strenger Allgemeinheit und Nothwendigkeit tragen, welche, als blos geistige Producte, nicht durch die Sinne des Leibes erkannt, sondern mit dem Auge des Geistes erfaßt und durchforscht werden müssen.

Aus diesen Betrachtungen gehen folgende Sätze und Gegensätze hervor, welche die Hauptzüge zu dem Bilde eines tauglichen und untauglichen Lehrers der Geometrie entwerfen.

Jener hält die Bildung des Geistes für den Hauptzweck, der durch das Studium dieser Wissenschaft auf öffentlichen Lehranstalten erreicht werden soll; die practischen Anwendungen aber nur für Nebenzweck, und richtet nach diesem seine Vorträge ein.

Dieser glaubt, er müsse die Geometrie einzig wegen des practischen Linien- Flächen- und Körper-Messens lehren.

Jener begnügt sich nirgends mit blos mechanischen Beweisen der Sätze, sondern will seine Schüler in den Geist der Sache einführen. Er sucht sie daher von der äussern Anschauung der räumlichen Objecte in das Innere Ihrer selbst zu lenken; denn nur in dem Geiste und durch den Geist ist wahre Geometrie, als Wissenschaft, möglich.

Dieser ist meist mit bloß mechanischen Beweisen zufrieden. Was dem Auge im Einzelnen erscheinet, soll sogleich auch vom Verstande, als allgemein gültige Wahrheit, anerkannt werden. Durch ihn wird der Geist aus seinem eigenthümlichen Wohnsitze heraus und in das (oft unsichere) Gebiet der blos sinnlichen Wahrnehmungen gezogen.

Jener bereitet die Schüler zu einem fruchtbaren Studium der Geometrie durch die geometrische Anschauungslehre vor. Diese gibt ihnen Kraft und Gewandtheit, sich mit Leichtigkeit in die Objecte der Geometrie zu finden, und ihre Verhältnisse um so schärfer zu übersehen.

Dieser begnügt sich, der geometrischen Lehre eine nothdürftige und magere Einleitung voranzuschicken. Der Schüler wird in wenigen Lehrstunden mit einer Menge von Anschauungen und Begriffen bestürmt, welcher, kaum flüchtig und verworren aufgefaßt, nun sogleich die geometrischen Beweise folgen, deren streng zusammenhängende Form dem

ersten Anfänger nun große Schwierigkeiten verursacht. — Wie kann hier der gute Kopf schnelle, das mittelmäßige Talent aber nur einige Fortschritte machen?

Jener macht sichs zur Regel, den eben zu beweisenden Satz den Schülern zuerst mit verständlichen Worten vorzusprechen. Er zeichnet die dazu gehörige Figur an die Schultafel, und erklärt den Sinn des Satzes an derselben. Dabei unterscheidet er, sowohl bei Theoremen als bei Problemen, die Hypothesis von der Thesis, und läßt, bei etwas verwickelten Sätzen, Beides von Einem oder von einigen Schülern wiederholen. Ist ihnen der Sinn der Behauptung oder der Forderung vollkommen klar, so beginnt (nach gezogenen Hülfslinien und angeführter Auflösung der Aufgaben) der Beweis. Dieser ist, der Regel nach, synthetisch. Der Lehrer geht, in freiem Gespräche, von einem Vordersatze zu andern, weiset Alles (mit einem Zeiger auf die Tafel deutend) sogleich nach, und nöthigt hierdurch die Schüler, Blick und Aufmerksamkeit auf die Zeichnung zu heften. So gelangt er zum Schlusse der Demonstration. Diese wird nun entweder von dem Lehrer, oder von einem Schüler, oder von mehreren wiederholt, um zu sehen, wo noch Dunkelheiten herrschen, die sogleich aufgehellt werden. Der zweckmäßigste Leitfaden dieses Unterrichts ist eine systematisch geordnete Reihe von Sätzen über die Grundlehren der Geometrie, welcher jedoch keine Beweise oder nur Andeutungen dazu beigefügt sind. Nachfol-

gende Schrift enthält die Ausführung davon. Diese Beweise muß, gleich den Auflösungen der Aufgaben, der Privatfleis des Schülers, nach der vom Lehrer erhaltenen Anleitung ersetzen. Hierdurch wird der Beweis zum geistigen Eigenthum der Schüler, und diese Anwendung eigner Kraft erhöhet ihr Interesse an der Wissenschaft.

Dieser leset den zu erweisenden Satz aus seinem Autor ab, und läßt sich nicht weiter in die Erklärung desselben ein. Entfernt, die dazu gehörige Zeichnung auf der Tafel zu entwerfen, und den Beweis mit eignen Worten zu geben, hält er sich sclavisch an die Perioden seines Lehrbuchs; zufrieden, wenn nur Er von der Wahrheit der Behauptung überzeugt ist. — Wohin kann eine so todte Behandlung der lebendigen Wissenschaft führen? Wie mag der Schüler einer Lehrart Interesse abgewinnen, welche einem Auskramen hieroglyphischer Formeln gleicht? Und ist es ihm zu verargen, wenn seine Aufmerksamkeit schwindet, und ein unbesiegbarer Widerwille gegen diese mysteriöse Lehre sich seiner bemächtigt? —

Der gute Lehrer verbindet endlich öfters mit der Synthesis die analytische Methode. Denn diese ist es, welche den Verstand zum Selbsterfinden am kräftigsten vorbereitet. Sehr nöthig ist es daher, zumal an etwas zusammengesetztern Beweisen, beide Methoden zugleich anzuwenden. In keiner Wissenschaft gibt es ein wirksameres Bildungsmittel des jugendlichen Geistes, als dieses. Nichts kann auch die Theilnahme des Lernenden höher spannen, als

wenn er sich als Selbsterfinder der geometrischen Wahrheit erblickt. Darum ist auch dieses Ziel das höchste und glänzendste des Lehrvortrags. Mit größter Klarheit erkennt der Schüler diese fruchtbare Quelle des menschlichen Geistes, und ist ihm nur einiges Gefühl für den unschätzbaren Werth der Wahrheit verliehen, so wird er, zur kräftigen Selbstthätigkeit angeregt, diesen geistigen Weg niemals verlassen.

Uebersicht der Schrift.

Erster Cursus.

Reine Elementargeometrie.

		Seite
I.	Grundlehren vom Kreise	3
II.	Construction der Dreiecke nach ihren Seiten .	13
III.	Congruenz der Dreiecke	18
IV.	Leichte Anwendungen von der Congruenz der Dreiecke	25
V.	Die Lehre von den Parallellinien	39
VI.	Die Vierecke und ihre verschiedene Arten . .	48
VII.	Die drei Winkel im Dreiecke. Maß der Winkel.	52
VIII.	Gleichheit der Parallelogramme und Dreiecke, und ihre Verwandlung	58
IX.	Die Sehnen und Tangenten des Kreises . .	67
X.	Von den Mittelpuncts- und Peripheriewinkeln	79
XI.	Die regelmäßigen Vielecke	81
XII.	Aehnlichkeit der Dreiecke	92
XIII.	Aehnlichkeit geradliniger Vielecke	112

Zweiter Cursus.

Rechnende Elementargeometrie.

I.	Allgemeine Vorbegriffe	121
II.	Ausmessung geradliniger Figuren	124
III.	Kreisrechnung	131
IV.	Linienverhältnisse vermittelst des Kreises . .	142
V.	Geometrische Theilungen der Figuren . . .	147

Seite

Dritter Cursus.

Practische Elementargeometrie.

I. Vom Messen gerader Linien überhaupt . . . 155
II. Das Messen der Entfernungen mit einfachen Werkzeugen 164
III. Figuren auf dem Felde in den Grund zu legen 169
IV. Das Messen mit künstlichen Geräthschaften . . 173
V. Etwas vom Höhenmessen 189

Vierter Cursus.

Elementar-Trigonometrie.

I. Vorbereitungslehren vom Ausziehen der Quadratwurzel 195
II. Geometrische Anwendungen vom Wurzelausziehen 209
III. Vordersätze zur rechnenden Dreieckslehre . . 215
IV. Berechnung der fehlenden Stücke des Dreiecks . 233
V. Vordersätze zur Trigonometrie, auf die Sinusse, Tangenten u. s. f. gegründet 252
VI. Anwendung auf die Berechnung der fehlenden Stücke des Dreiecks 266
VII. Einige andere Anwendungen dieser Lehre . . 282
VIII. Berechnung der Dreiecksebene aus ihren gegebenen drei Seiten . : 287

Der geometrischen Wissenschaftslehre erster Cursus.

Reine Elementargeometrie.

Reine Elementargeometrie.

I. Grundlehren vom Kreise.

§. 1.

Erklärungen. I. In einer unbegrenzten Ebene nehme man eine beliebige gerade Linie an und in dieser einen willkührlichen Punct.

Die Papierfläche von Tafel I. stelle jene Ebene, AB (Fig. 1.) die gerade Linie in ihr und C den darin gewählten Punct vor.

II. Von diesem Puncte nehme man auf der geraden Linie, nach der einen oder andern Seite hin, ein willkührliches Stück.

Dieses Stück sei die von C auf CA genommene gerade Linie CD.

III. Es bewege sich dieses Stück um den festen Punct (II.) in der Ebene (I.) einmal ganz und gar herum, bis es wieder in die erste Lage zurückekehrt.

Die gerade CD drehe sich so um den unbeweglichen Punct C, daß sie immer in der nämlichen Ebene bleibt und daß der Punct D in H, F, E, L, G, I, und wieder zurück in D kömmt.

IV. Durch dieses Herumbewegen (III.) beschreibt der bewegte Endpunct dieses Stückes eine krumme,

in sich selbst zurücklaufende Linie, welche die Kreislinie heißt.

Der um C in der Entfernung CD fortschreitende Punct D beschreibt die Kreislinie DHFELGID.

V. Der von dieser Kreislinie eingeschlossene Flächenraum heißt die Kreisfläche oder die Kreisebene.

Die von der Kreislinie DHFELGID begrenzte Ebene ist diese Kreisfläche.

VI. Die Kreisfläche oder Kreisebene (V.) ist eine Figur, und zwar eine krummlinige Figur.

VII. Man nennt die ganze Kreislinie die Peripherie oder den Umfang des Kreises. Jeder zwischen zwei beliebigen Puncten enthaltene Theil derselben, heißt ein Bogen des Kreises oder ein Kreisbogen.

Durch die Puncte D und H wird der Bogen DH, durch H und F der Bogen HF, durch E, G und I der Bogen EGI bestimmt. Größere Bogen benennt man am Füglichsten mit drei Buchstaben. Denn: Bogen EI könnte auch das Stück EFI bezeichnen.

VIII. Die gerade Linie (II.) durch deren Umdrehung die Kreislinie (IV.) entstanden ist, heißt der Halbmesser oder Radius des Kreises.

Daher ist CD der Halbmesser des Kreises DHFEGID.

IX. Der feste Endpunct des Halbmessers (VIII.) heißt der Mittelpunct; sein beweglicher Punct aber der beschreibende Punct des Kreises.

Somit ist C der Mittelpunct, D der beschreibende Punct des Kreises DHFEGID.

X. Eine gerade Linie, welche von einem beliebigen Puncte des Umfangs (VII.) durch den Mittelpunct (IX.) bis wieder zum Umfange geht, nennt man den Durchmesser oder Diameter des Kreises.

Daher sind die Linien DE und HL Durchmesser.

XI. Jene gerade Linie, welche, ohne durch den Mittelpunct (IX.) zu gehen, die Peripherie zweimal berührt, heißt eine Sehne oder Chorde; jeder der beiden durch die Endpuncte der Sehne bestimmte Bogen (VII.) wird der zur Sehne gehörige Bogen genannt.

Die gerade Linie IG ist eine Sehne; die Bogen IDHFELG und IKG sind die dazu gehörigen Bogen.

XII. Derjenige Theil der Kreisebene (V.), welcher von einer Sehne und dem dazu gehörigen Bogen (XI.) eingeschlossen ist, heißt ein Abschnitt des Kreises, oder Kreisabschnitt. Jenes Stück seiner Fläche aber, welches von zwei Halbmessern (VIII.) und dem dazwischen liegenden Bogen (VII.) begrenzt wird, heißt der Ausschnitt des Kreises, oder Kreisausschnitt (Sector).

Daher ist sowohl IFEGI als IKGI ein Abschnitt; DCHD oder FELCF aber ein Ausschnitt.

§. 2.

Grundsätze. I. Alle Halbmesser des nämlichen Kreises sind einander gleich; oder CD = CH = CF = CE u. s. f.

II. Da jeder Durchmesser aus zwei Halbmessern besteht (§. 1. X.), so sind auch in dem nämlichen Kreise alle Durchmesser gleich.

Daher ist DE = HL u. s. w.

III. Eine gerade, aus des Kreises Mittelpuncte gehende Linie, welche kleiner, als dessen Halbmesser ist, liegt ganz innerhalb des Kreises.

Wenn CM < CD, so liegt CM ganz in dem Kreise.

IV. Ist aber die gerade, aus dem Mittelpuncte kommende Linie größer, als des Kreises Halbmesser, so liegt ein Theil von ihr und ihr Endpunct ausserhalb des Kreises.

Es sey CN > CD, so ist, weil CS = CD (I.), das Stück SN ausser dem Kreise.

V. Eine (gerade oder krumme) Linie, welche einen Punct in dem Kreise (III.) mit einem Puncte ausserhalb desselben (IV.) verbindet, muß seinen Umfang wenigstens in einem Puncte durchschneiden.

Wenn O in und P ausser dem Kreise liegt, so wird die gerade Linie OP die Peripherie in Q; die krumme ORP aber die Peripherie in R schneiden.

§. 3.

Foderung. In jeder gegebenen Ebene aus einem gegebenen Puncte mit gegebenem Halbmesser einen Kreis zu construiren.

§. 4.

Erklärung. Kreise, welche aus einerlei Mittelpuncte mit ungleichen Halbmessern in einerlei Ebene construirt sind, heißen concentrische Kreise.

Wenn (Fig. 2.) aus C mit CD der Kreis DEFD und mit CA > CD der Kreis AGHLA beschrieben ist, so sind diese Kreise concentrische.

Wenn man mehr als zwei ungleiche Halbmesser annimmt, so kann man auch mehr als zwei concentrische Kreise bilden.

§. 5.

Lehrsatz. Concentrische Kreislinien (§. 4.) haben keinen Punct mit einander gemein.

Beweis. I. Direct. Daß die mit dem größern Halbmesser beschriebene Kreislinie keinen Punct mit der durch den kleinern Halbmesser entstandenen Kreislinie gemein haben könne, folgt aus dem Obigen. (§. 2. IV.) – Auch ist (nach §. 2. III.) klar, daß die kleinere Kreislinie keinen Punct mit der größern gemein haben kann.

II. Indirect. Weil sonst die beiden Kreislinien für den gemeinschaftlichen Punct auch einen gemeinschaftlichen Halbmesser haben müßten, was gegen die Voraussetzung (in §. 4.) ist.

§. 6.

Grundsätze. I. Zwischen zwei Puncten ist die gerade Linie die kürzeste. Jede andere (gebrochene, krumme oder vermischte) Linie zwischen den nämlichen Puncten ist folglich größer.

Es sey AB (Fig. 3.) eine gerade Linie, so ist $AB < AC + CB$; $AB < ADEB$; $AB < AFGB$; $AB < AHKB$ u. s. f.

II. Da es zwischen zwei Puncten nur eine kürzeste Linie und auch nur einen Abstand des einen Punctes vom andern geben kann, so wird der Abstand zweier Puncte durch die gerade Linie zwischen ihnen bestimmt.

§. 7.

Erklärung. Kreislinien, welche aus verschiedenen Mittelpuncten, (mit gleichen oder ungleichen Halbmessern) beschrieben sind, werden excentrische Kreislinien genannt.

Die Kreislinien in den Figg. 4, 5, 6, sind excentrische.

§. 8.

Lehrsatz. Wenn man in einer willkührlichen geraden Linie zwei beliebige Puncte und von jedem gegen den andern hin ein Stück auf der Linie dergestalt nimmt, daß ihre Summe kleiner, als der Abstand (§. 6., II.) jener Puncte ist, so liegen die beiden mit diesen Stücken aus jenen Puncten beschriebenen Kreise ganz ausser einander, d. h., sie haben nichts mit einander gemein.

Es sei RS (Fig. 4.) die gerade Linie, M und N seien die willkührlichen Punkte in ihr, MC und NE die angenommenen Stücke, und $MC + NE < MN$, so haben die mit MC und NE aus M und N beschrie-

benen Kreise CBADC und EFGHE nichts mit einander gemein.

Beweis. Hätten sie z. B. in O einen gemeinschaftlichen Punct, so müßten MO und NO Halbmesser seyn, und es wäre MO + NO = MC + NE; folglich hätte man MO + NO < MN, welches unmöglich ist, da MO + NO > MN seyn muß. (§. 6, I.)

§. 9.

Lehrsatz. Wenn in einer gegebenen geraden Linie zwei willkührliche Puncte, und zwischen beiden noch ein dritter nach Belieben genommen werden, so haben die zwei Kreise, welche aus den zwei ersten Puncten mit den beiden Stücken der dazwischen liegenden Linie beschrieben werden; nur einen Berührungspunct gemein.

Auf der geraden Linie MN (Fig. 5.) seien B und D die zwei zuerst gewählten Puncte, C der willkührliche Zwischenpunct, so werden die mit BC und DC aus B und D beschriebenen Kreise CFAGC und CHEIC sich nur in C berühren.

Beweis. Hätten sie noch einen andern Punct, z. B. Q gemein, so wären BQ und DQ ihre Halbmesser und es müßte BQ + DQ = BC + DC seyn. Dieses ist aber unmöglich, da (nach §. 6, I.) BQ + QD > BD ist.

§. 10.

Lehrsatz. Wenn man in einer geraden Linie zwei Puncte willkührlich nimmt, mit einem willkührlichen Stücke ihres Abstandes aus dem einen Puncte einen Kreis beschreibt und dann auch aus dem zweiten mit einem zweiten Stücke (kleiner als dieser Abstand) einen zweiten beschreibt; so, daß die Summe der beiden Stücke größer, als der Abstand der Mittelpuncte dieser Kreise ist, so müssen sich die beiden Kreislinien in zwei Puncten durchschneiden.

Es sei MN (Fig. 6.) die gerade Linie, B und C seien die in ihr angenommenen Puncte, und mit dem Stücke BF < BC sei der Kreis FRASF beschrieben, so wird, wenn man nun aus C mit einem Stücke CE; so, daß CE < CB, und CE + BF > BC ist, einen Kreis EHDG beschreibt, dieser den ersten in zwei Puncten M und N durchschneiden.

Beweis. Da nach der Annahme CE + EB < CE + FB ist, so muß EB < FB seyn und der Punct E liegt innerhalb des Kreises FRASF. Da ferner BF < BC ist, so muß um so mehr auch BF < BD seyn und der Punct D liegt ausserhalb des Kreises FRAFF (§. 2, III. und IV.) Da nun ferner die mit dem Halbmesser CE beschriebene Kreislinie eine ununterbrochene Linie ist, so muß sie sowohl oberhalb als unterhalb der Linie MN aus dem Kreise FRASF heraustreten. (§. 2, V.) Dies gibt zwei Durchschnittspuncte M und N.

§. 11.

Lehrsatz. Wenn man in der Fläche eines gegebenen Kreises, ausser dessen Mittelpuncte, einen willkührlichen Punct als Mittelpunct eines zweiten Kreises annimmt und aus diesem mit einem Halbmesser, der, zur Entfernung beider Mittelpuncte addirt, kleiner als der Radius des gegebenen Kreises ist, einen Kreis beschreibt, so liegt der zweite Kreis ganz in dem ersten, und die Kreislinien haben keinen Punct gemein.

Wenn man in der Fläche des mit dem Halbmesser CE (Fig. 7.) beschriebenen Kreises EMNRE den willkührlichen Punct B annimmt, und aus ihm mit dem Halbmesser BD, jedoch so, daß BD + CB < CE, einen Kreis DFVGD beschreibt, so liegt dieser ganz innerhalb des größern, und die Kreislinien haben keinen Punct gemein.

Beweis. Die Wahrheit des Satzes folgt daraus, daß nach der Annahme CB + BD < CE, folglich BD < BE ist und um so mehr BD < BN seyn muß. Wenn also der Kreis mit BD keinen Punct mit dem Kreise mit BE gemein hat, so muß der Kreis DFVGD um so mehr ganz innerhalb des Kreises EMNRE liegen.

§. 12.

Zusatz. Obschon in diesem Falle (§. 11.) die Entfernung der Mittelpuncte beider Kreise kleiner,

als die Summe ihrer Halbmesser ist, so schneiden sich beide Kreislinien dennoch nicht.

§. 13.

Lehrsatz. Wenn (in §. 11.) die Entfernung der Mittelpuncte zweier Kreise nebst dem Halbmesser des kleinern dem Radius des größern gleich ist, so berührt der kleinere den größern Kreis in einem Puncte von Innen.

Wenn (Fig. 8.) CB + BD = CD, so berührt der kleinere Kreis DFVGD den größern Kreis DMNRD in dem Puncte D.

Beweis. Denn wenn die Kreise noch einen Punct, z. B. Q gemein hätten, so wären CQ und BQ ihre Halbmesser und es müßte, nach der Voraussetzung, CB + BQ = CQ seyn, was aber nach (§. 6, I.) unmöglich ist.

§. 13. *a.*

Anmerkung. Alle mögliche Fälle vom Schneiden und Berühren zweier Kreislinien lassen sich auf folgende Weise bequem übersehen. Wenn aus einem willkührlichen Puncte mit beliebigem Halbmesser ein Kreis beschrieben und ausserhalb desselben ein zweiter Punct als Mittelpunct eines zweiten Kreises genommen wird, so ist entweder

I. Der Halbmesser dieses zweiten Kreises nebst jenem des ersten Kreises zusammen kleiner, als die Entfernung der Mittelpuncte beider Kreise, und nun liegen beide Kreise ganz ausser einander; oder

II. Die Summe beider Halbmesser ist dem Abstande ihrer Mittelpuncte gleich, und nun berühren sich beide Kreise in einem Puncte von Aussen; oder

III. Die Summe beider Radien ist größer als die Entfernung der Mittelpuncte; jedoch so, daß des zweiten Kreises Halbmesser kleiner, als der Abstand ihrer Mittelpuncte nebst dem Radius des ersten Kreises ist, und nun durchschneiden sich beide Kreise einander in zwei Puncten; oder

IV. Der Halbmesser des zweiten Kreises ist der Summe aus der Entfernung ihrer Mittelpuncte und dem Radius des ersten Kreises gleich, und nun berühren sich beide Kreise in einem Puncte von Innen; oder

V. Der Radius des zweiten Kreises ist größer als die Summe aus dem Abstande ihrer Mittelpuncte und dem Halbmesser des ersten Kreises, und nun liegt der erste Kreis ganz in dem zweiten und beide haben keinen Punct mit einander gemein. Der erste Kreis ist hier der umschlossene, der zweite Kreis der umschließende.

Der Lehrer mache diese fünf Fälle an einer Zeichnung klar, oder lasse sie von den Schülern selbst finden.

II. Construction der Dreiecke nach ihren Seiten.

§. 14.

Aufgabe. Ein ebenes geradliniges Dreieck zu construiren, ohne auf die Größe seiner Seiten Rücksicht zu nehmen.

Auflösung. I. Durch drei Puncte, die nicht in gerader Linie liegen und mit drei geraden Linien verbunden werden;

II. Durch Construction eines Winkels, dessen Oeffnung mit einer beliebigen geraden Linie geschlossen wird;

III. Durch eine gerade Linie und durch Construction einer Winkellinie, welche von ihrem einen Endpuncte ausgeht und nach ihrem andern Endpuncte zurückekehrt.

I. Es seien (Fig. 9.) A, B und C die drei gegebenen, nicht in gerader Linie liegenden Puncte, so wird durch die gezogenen drei geraden Linien AB, AC und CB das Dreieck ACB construirt;

II. Durch Construction eines Winkels CAB, der mit der geraden Linie CB geschlossen wird, entsteht ebenfalls ein Dreieck CAB;

III. Durch eine gerade Linie AB und eine Winkellinie ACB, die von A ausgeht und durch C nach B zurückekehrt, entspringt wieder ein Dreieck ACB.

§. 15.

Anmerkung. Der Lehrer wird diese Entstehungsweise der Dreiecke auf mehrfache Weise erläutern und bemerken, daß es hierbei nur darauf ankömmt, die Entstehung eines Dreiecks überhaupt nachzuweisen, ohne eine bestimmte Größe seiner Seiten oder seiner Winkel zu betrachten.

§. 16.

Lehrsatz. In jedem Dreiecke sind je zwei Seiten zusammengenommen größer, als die dritte Seite.

In dem Dreiecke ABC (Fig. 9.) ist $AB + BC > CA$; $BC + CA > AB$; $CA + AB > BC$.

Beweis. Die Wahrheit folgt unmittelbar aus §. 6, I.

§. 17.

Zusatz. Wenn daher aus drei gegebenen geraden Linien ein Dreieck gebildet werden soll, so müssen je zwei davon zusammen größer als die dritte seyn. Sind sie zusammengenommen eben so groß, oder kleiner als die dritte Linie, so läßt sich aus ihnen kein Dreieck construiren.

§. 18.

Zusatz. Auch muß in jedem Dreiecke der Unterschied je zweier Seiten kleiner als die dritte, oder jede Seite größer als der Unterschied der zwei andern seyn.

In dem Dreiecke DEF (Fig. 10.) worin $EF > ED$ seyn soll, ist $EF - ED < DF$. Denn wenn man sich einen Theil von EF, z. B. $EG = ED$ denkt, so ist $ED + DF > EG + GF$ (§. 16.). Nimmt man beiderseits die gleichen Linien ED und EG hinweg, so bleibt $DF > GF$ übrig. Ein Gleiches gilt von dem Unterschiede jedes Paars der übrigen Seiten.

Diese beiden Fälle müssen vermittelst der zu construirenden Hülfslinien durchgeführt werden.

Wären zwei Seiten einander gleich, so ist ihr Unterschied = O und die Behauptung von selbst klar.

Auch kann dieser Beweis leicht indirect geführt werden, was eine empfehlenswerthe Uebung für Anfänger ist.

§. 19.

Aufgabe. Aus drei gegebenen geraden Linien, welche die erfoderliche Eigenschaft (§. 17 u. 18.) haben, ein Dreieck zu construiren.

Es seien (Fig. 11.) a, b und c die gegebenen geraden Linien, und $a + b > c$; $a + c > b$, auch $b + c > a$. Man soll aus ihnen ein Dreieck bilden.

Auflösung. Diese beruht darauf, daß man irgend eine dieser Seiten als Grundlinie des zu construirenden Dreiecks annimmt, und aus jedem ihrer Endpuncte mit einer der zwei andern, als Halbmessern, zwei Kreise beschreibt, welche auf jeder Seite der Grundlinie einen Durchschnittspunct geben. Hierdurch entstehen die Dreiecke M, N; O, P; R, S (in Fig. 12, 13, 14), die eigentlich nur ein einziges Dreieck (in verschiedener Lage betrachtet) sind.

Beweis. Die Richtigkeit der Auflösung geht unmittelbar aus §. 10. hervor.

§. 19. *a.*

Anmerkung. I. Wenn (Fig. 11) a die kleinste, b die mittlere und c die größte der gegebenen Linien ist, so erhellet die Möglichkeit, aus ihnen ein Dreieck zu bilden, am Bequemsten daraus, daß man untersucht, ob $a + b > c$ ist. Hat dieses Statt, so muß nnn auch $a + c > b$ und $b + c < a$ seyn.

II. Der Lehrer erläutere dieses durch Beispiele in Zahlen.

§. 20.

Aufgabe. Aus drei gegebenen Linien, worunter zwei gleiche sind und welche die nöthige Beschaffenheit (§. 17 u. 18) haben, ein gleichschenkeliges Dreieck zu construiren.

Es seien (Fig. 15) a und b die gegebenen Seiten zum gleichschenkeligen Dreiecke wobei man sich entweder a doppelt und b einmal, oder b zweimal und a nur einmal vorstellt; auch sei $a + a > b$ und $b + b > a$. Man soll aus ihnen ein gleichschenkeliges Dreieck bilden.

Auflösung. Jenachdem man a oder b zur Grundlinie annimmt, entsteht auch ein anderes gleichschenkeliges Dreieck. Ihre Construction ergibt sich unmittelbar aus dem vorigen §. Man erhält entweder die Dreiecke M und N (Fig. 16.), oder O und P (Fig. 17.)

§. 20. *a.*

Zusatz. Auch folgt hieraus, daß die kleinere der zwei gegebenen Linien größer, als die Hälfte

der größern, oder die größere größer, als das Doppelte der kleinern seyn müsse.

§. 21.

Aufgabe. Ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite eine gegebene Linie ist, zu construiren.

Es sey (Fig. 18.) a die gegebene Seite des zu bildenden Dreiecks.

Auflösung. Nach Anleitung der beiden vorigen §§. entsteht das Dreieck M (Fig. 19.) oder auch N, welches mit jenem einerlei und nur der Lage nach verschieden ist.

III. Congruenz der Dreiecke.

§. 22.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken eine Seite des einen gleich ist einer Seite des andern, der daranliegende Winkel und dessen anderer Schenkel in beiden ebenfalls gleich sind, so können beide Dreiecke so in einander gelegt werden, daß sie sich decken, und die übrigen drei Stücke des einen sind den zugehörigen Stücken des andern einzeln genommen gleich.

Es sey, in den Dreiecken (Fig. 20.) ABC und DEF, die Seite BC = EF, W. ABC = W. DEF und BA = ED, so werden diese Dreiecke, gehörig in einander gelegt, sich decken, und es ist AC = DF, W. BAC = W. EDF und W. BCA = W. EFD,

Beweis. Wenn man die als gleich angenommenen Stücke gehörig in einander legt, so ergibt sich das Decken der Dreiecke sehr leicht daraus, daß die Seite EF die Seite BC, der Winkel FED den Winkel CBA und die Seite ED die Seite BA decket und folglich die Puncte F, E und D des Dreiecks FED in den Puncten C, B und A des Dreiecks CBA liegen. Aus der bewiesenen Congruenz folgt sodann wiederum die Gleichheit der drei übrigen Stücke.

§. 23.

Anmerkung. I. Der Lehrer lasse diesen Beweis nach allen möglichen Voraussetzungen der als gleich angenommenen Stücke durchführen. Da zwischen jeden zwei Dreiecksseiten ein Winkel liegt, so sind drei verschiedene Fälle der Hypothesis und der Thesis möglich, welche vortrefflich zur Uebung der Anfänger dienen.

II. Auch kann der Beweis über die Richtigkeit des Lehrsatzes ohne das Ineinanderlegen der gleichen Stücke geführt werden, indem man leicht einsieht, daß das ganze Dreieck verändert wird, wenn man einen Winkel oder einen der beiden Schenkel, welche ihn einschließen, verändert.

§. 24.

Zusatz. In jedem gleichschenkeligen Dreiecke sind die zwei Winkel an der Grundlinie einander gleich.

Es sey ACB (Fig. 21.) ein gleichschenkeliges Dreieck, worin CA = CB, so muß auch W. A = W. B seyn.

I. Die Wahrheit beruht darauf, daß man sich das nämliche Dreieck ACB unter dem Dreiecke EDF noch einmal vorstellt; so, daß AC = CB = ED = DF, auch W. C = W. D ist, und durch gehöriges Ineinanderlegen derselben nach dem Beweise des §. 22. zeiget, daß W. A einmal den W. E und dann auch den W. F deckt, woraus W. E = W. F = W. A = W. B. folgt.

II. Auch ergibt sich die Gleichheit der W. A und B daraus, daß in dem Dreiecke ACB bei A alles gerade so ist, wie bei B. Aus dem nämlichen Grunde, woraus W. A größer oder kleiner als W. B wäre, folgte auch, daß W. B größer oder kleiner als W. A seyn müßte. Beides zugleich aber ist unmöglich.

§. 25.

Zusatz. Wenn in einem Dreiecke drei gleiche Seiten sind, so hat es auch drei gleiche Winkel, d. h. es ist gleichwinkelig.

Es sey in dem Dreiecke MNR (Fig. 22.) MN = NR = RM, so ist W. R = W. M = W. N.

Denn aus MN = NR folgt (nach §. 24) W. R = W. M, und aus NR = RM folgt W. M = W. N.

§. 26.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken eine Seite des einen gleich ist einer Seite des andern, auch die an diesen Seiten anliegenden zwei

Winkel in beiden Dreiecken, einzeln genommen, einander gleich sind, so können diese Dreiecke so in einander gelegt werden, daß sie sich decken und die übrigen gleichliegenden Stücke sind auch einander gleich.

Es sey in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 20.) die Seite BC = EF, der W. ABC = W. DEF und W. ACB = W. DFE, so sind die Dreiecke congruent, und es ist BA = ED, CA = FD, und W. BAC = W. EDF.

Beweis. Auch hier folgt aus dem gehörigen Ineinanderlegen der gleichen Stücke sehr leicht die Congruenz der Dreiecke, da die Seite EF so in die Seite BC gelegt werden kann, daß sie die letztere decket; wo denn nun die FD längs der CA, die ED längs der BA und folglich auch der Punct D in den Punct A fällt.

§. 27.

Anmerkung. I. Rathsam ist es, diesen Beweis für jede andere Seite nebst den zwei daranliegenden Winkeln durchführen zu lassen. Ausser dem so eben betrachteten Falle (in §. 26.) sind noch zwei andere Annahmen möglich.

II. Auch kann der Beweis so gegeben werden, daß man einsieht, wie bei Veränderung eines dieser drei Stücke das ganze Dreieck verändert werde.

§. 28.

Zusatz. Wenn in einem Dreiecke an einer Seite zwei gleiche Winkel liegen, so stehen diesen

Winkeln zwei gleiche Seiten gegenüber, d. h. das Dreieck ist gleichschenkelig.

Es sey (Fig. 21.) an der Seite AB der W. A = W. B, so ist auch die Seite BC = Seite AC.

I. Denn wenn man sich das Dreieck ACB noch einmal denkt unter der Gestalt des Dreiecks EDF; so, daß AB = EF, W. A = W. B = W. E = W. F ist, so kann man (§. 26) jenes so in dieses legen, daß einmal AC in ED, dann auch AC in FD fällt. Daher müssen auch ED und FD, AC und BC einander gleich seyn.

II. Diese Wahrheit leuchtet ferner auch daraus ein, daß in dem Dreiecke ACB bei A Alles gerade so, wie bei B ist. Sollte also AC größer oder kleiner als BC seyn, so müßte auch BC größer oder kleiner als AC seyn, welches zugleich unmöglich ist

§. 29.

Zusatz. Wenn in einem Dreiecke drei gleiche Winkel sind, so hat es auch drei gleiche Seiten, d. h. es ist ein gleichseitiges Dreieck.

Es sei in dem Dreiecke MNR (Fig. 22.) W. N = W. M = W. R, so ist auch MR = RN = NM.

Denn aus W. N = W. M folgt nach §. 28 daß RM = RN, und wegen W. M = W. R ist aus gleichem Grunde RN = MN. Daher muß auch RM = RN = MN seyn.

§. 30.

Zusatz. Das gleichseitige Dreieck ist folglich eine regelmäßige oder reguläre Figur, oder ein reguläres Dreieck.

§. 31.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken die drei Seiten des einen, einzeln genommen, den drei Seiten des andern gleich sind, so können diese Dreiecke so in einander gelegt werden, daß sie sich decken.

Wenn in den Dreiecken (Fig. 20.) ABC und DEF die Seite AB = DE, BC = EF und CA = FD ist, so sind die Dreiecke congruent, und es ist W. C = W. F, W. A = W. D und W. B = W. E.

Beweis. Wenn man die beiden Dreiecke mit zwei ihrer gleichen Seiten so in einander legt, daß die denselben gegenüberliegenden Winkel auf entgegengesetzten Seiten dieser in einander fallenden Linien liegen, und nun beide Winkelspitzen durch eine gerade Linie verbindet, so entstehen drei mögliche Lagen. In jedem dieser drei Fälle kann der Beweis, mit Hülfe des Satzes, daß im gleichschenkeligen Dreiecke die Winkel an der Grundlinie gleich sind, leicht geführt werden.

Wenn man die Dreiecke ABC und DEF so leget, daß die gleichen Seiten BC und EF in einander fallen, und die Scheitel A und D auf entgegenge-

setzter Seite von BC liegen, auch sodann von A nach D eine gerade Linie zieht, so entstehen die drei Lagen von (Fig. 23, I, II und III.) woran der Beweis für die Congruenz der Dreiecke BAC und BDC leicht gefunden wird, durch die Hülfssätze in §. 24 und in §. 22. Denn in Fig. 23, I. ist BA = BD, folglich W. A = W. D (§. 24.) und nun, wegen BA = BD und AC = DC, auch Dr. BAC congruent dem Dr. BDC (nach §. 22).

In Fig. 23, II. ist, wegen BA = BD, auch W. BAD = W. BDA (§. 24.) und, wegen CA = CD, auch W. CAD = W. CDA (§. 24). Folglich ist auch W. BAC = W. BDC und das Dr. BAC congruent dem Dr. BDC (nach §. 22).

In Fig. 23, III. ist zuerst W. BAD = W. BDA dann auch W. CAD = W. CDA nnd folglich W. BAC = W. BDC, woraus die Congruenz der Dreiecke BAC und BDC nach §. 22. wieder hervorgeht.

§. 32.

Zusatz. I. Aus drei gegebenen Linien kann man nur ein einziges Dreieck bilden, obwohl es verschiedene Lagen haben kann.

II. Der Beweis des vorigen Lehrsatzes läßt sich auch dadurch führen, daß die Lage eines Punctes gegen die beiden Endpuncte einer gegebenen geraden Linie völlig bestimmt ist, sobald seine Abstände von jenen Puncten bestimmt sind.

III. Aus dem Bisherigen (§. 22. 26 u. 31.) folget, daß

1. Zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel,
2. Eine Seite und die zwei daran liegenden Winkel, und
2. Alle drei Seiten die Natur eines Dreiecks bestimmen.

§. 33.

Anmerkung. Aus Vergleichung der bisherigen drei Sätze von der Congruenz der Dreiecke mit der oben (§. 14.) angeführten Auflösung der Aufgabe: Ein Dreieck zu construiren, ohne auf die Größe seiner Seiten Rücksicht zu nehmen, ergibt sich eine lehrreiche Uebereinstimmung dieser Wahrheiten, welche der Lehrer den Anfängern klar machen muß.

IV. Leichte Anwendungen von der Congruenz der Dreiecke.

§. 34.

Aufgabe. Man soll einen gegebenen geradlinigen Winkel halbiren.

Es sei ABC (Fig. 24.) der gegebene Winkel. Man soll die Lage einer geraden Linie BD finden, wodurch W. ABD = W. CBD wird.

Auflösung. Diese ergibt sich leicht aus Betrachtung der in der Figur gezogenen Hülfslinien BM = BN und MR = NR, dann aus der gezogenen Linie BRD.

Beweis. Er beruht auf der Congruenz der Dreiecke BMR und BNR, welche die drei Seiten stückweise gemein haben, nach §. 31.

§. 35.

Zusatz. Daher kann man auch einen gegebenen Winkel in 4, 8, 16, 32 u. s. f. gleiche Theile; aber noch nicht in 3, 5, 7, 9 u. s. w. gleiche Theile eintheilen.

§. 36.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie in zwei gleiche Theile zu theilen.

Es sey AB (Fig. 25.) die gegebene Linie. Man soll einen Punct D finden, wodurch AD = BD wird.

Auflösung. I. Durch zwei auf entgegengesetzte Seiten von AB beschriebene gleichseitige Dreiecke ACB und AFB und die gezogene Verbindungslinie ihrer Spitzen CF.

II. Vermittelst zweier über die gegebene Linie AB beschriebenen gleichschenkeligen Dreiecke ARB und ASB (Fig. 26.) und der Verbindungslinie RSD.

III. Durch ein gleichschenkeliges Dreieck ALB (Fig. 27.) und Halbirung des Winkels L an der Spitze vermittelst der Linie LD.

Beweis. Sämtliche Beweise sind leichte Folgen aus der Lehre von den congruenten Dreiecken. Denn in I. ist Dr. CAF congruent dem Dr. CBF (§. 31.) folglich W. ACF = W. BCF und daher (nach §. 22.) Dr. ACD congruent dem Dr. BCD.

In II. ist Dr. ARS congruent dem Dr. BRS nach §. 31. und Dr. ARD congruent dem Dr. BRD nach §. 22.

In III. ist Dr. ALD congruent dem Dr. BLD nach § 22.

§. 36. *a.*

Zusatz. Hierdurch kann auch jede gerade Linie in 4, 8, 16; aber noch nicht in 3, 5, 7, u. s. f. gleiche Theile getheilt werden.

§. 37.

Anmerkung. Da in allen Fällen: (Fig. 25, 26 u. 27.) die Linien: CD, RD und LD mit der gegebenen AB bei D zwei gleiche Nebenwinkel bilden, so ist jeder von ihnen (nach der bekannten Worterklärung in der Anschauungslehre) ein rechter Winkel. Dies führt zur Construction dieses Winkels in folgenden Aufgaben.

§. 38.

Aufgabe. In einer gegebenen geraden Linie ist ein willkührlicher Punct genommen. Man soll durch ihn eine gerade Linie dergestalt construiren, daß sie mit der gegebenen zwei gleiche Nebenwinkel bildet, oder auf ihr lothrecht steht.

Es sei MN (Fig. 28.) die gegebene Linie, A der in ihr gewählte Punct. Man soll eine Linie AB construiren, wodurch W. MAB = W. NAB wird.

Auflösung. Diese ergibt sich aus den Hülfslinien der Figur, worin AC = AG, CB = GB genommen und BA gezogen wird. Auch kann CD = GD genommen und DA gezogen werden.

Beweis. Ergibt sich durch die Congruenz der der Dreiecke BAC und BAG, so wie auch der Dreiecke DAC und DAG nach §. 31.

§. 39.

Aufgabe. Von einem ausserhalb einer geraden Linie gegebenen Puncte eine gerade Linie so auf diese gegebene zu ziehen, daß sie mit ihr zwei gleiche Nebenwinkel bildet, oder daß sie auf ihr lothrecht steht.

Es sei AB (Fig. 30.) die gegebene gerade Linie, C der ausser ihr befindliche Punct. Man soll CE finden, wodurch W. CEA = W. CEB wird.

Auflösung. I. Sie ergibt sich aus Betrachtung der Hülfslinien in (Fig. 30.) worin CM = CN, MD = ND gemacht und CD gezogen ist; oder auch II. in (Fig. 31.) worin CA = CB, AD = BD gemacht und CDE gezogen ist.

Beweis. Beruht wieder auf der Congruenz der Dreiecke. Denn in I. ist Dr. MDC congruent dem Dr. NDC (§. 31.) folglich W. MCD = W. NCD und nun Dr. MCE congruent Dr. NCE (§. 22.)

In II. ist Dr. CDA congruent Dr. CDB (§. 31.) und nun Dr. CEA congruent Dr. CEB (nach §. 22.)

§. 39. *a*.

Anmerkung. Eine andere, eigenthümliche und, wie es scheint, vorzüglichere Auflösung der vorigen Aufgabe ist diese. Um von A (Fig. 29.) auf BC das Loth AO zu ziehen, construire man aus A die zwei willkührlichen

Linien AD und AE auf BC, trage das Dr. DAE nach DFE und ziehe AF, so ist diese das verlangte Loth. Denn Dr. DAE ist congruent dem Dr. DFE (§. 31.) und Dr. AEO ist nun auch congruent dem Dr. FEO (nach §. 22.)

§. 40.

Erklärung. Eine gerade Linie, welche auf einer andern geraden so errichtet ist, daß sie mit ihr zwei gleiche Nebenwinkel bildet, heißt bekanntlich eine senkrechte Linie (oder ein Loth, oder eine lothrechte Linie, oder ein Perpendickel) und jeder dieser gleichen Nebenwinkel wird ein rechter Winkel (oder kurz: ein Rechter) genannt. Sein willkührliches Zeichen ist R. Die Construction des rechten Winkels ist also hierdurch nachgewiesen. Eben so auch jene des spitzen und stumpfen Winkels, da jener kleiner, dieser größer als der Rechte ist.

§. 41.

Lehrsatz. Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt immer zwei rechte Winkel.

Es seien (Fig. 32.) ACE und ECB zwei Nebenwinkel, so sind sie zusammen zweien Rechten gleich.

Auflösung und Beweis ergeben sich leicht aus Betrachtung der Figur durch die aus C auf AB gezogene senkrechte Linie CD, wodurch W. ACE = R + W. DCE und W. ECB = R — W. DCE; folglich W. ACE + W. ECB = 2 R ist.

§. 42.

Lehrsatz. Wenn die Summe zweier Winkel, die einen gemeinschaftlichen Schenkel und Scheitel haben, zwei rechte Winkel beträgt, so bilden die beiden nicht gemeinschaftlichen Schenkel eine einzige gerade Linie, d. h. diese Winkel sind Nebenwinkel.

Es sei (Fig. 33.) W. ACD + W. DCB = 2 R; so sind diese Winkel Nebenwinkel, d. h. die Schenkel CA und CB bilden nur eine gerade Linie ACB.

Beweis. Gründet sich darauf, daß weder CM noch CN die Verlängerung der Linie AC seyn kann, ohne der Annahme (W. ACD + W. DCB = 2 R) zu widersprechen. Denn im ersten Falle müßte W. ACD + W. DCM (nach §. 41.) = 2 R, folglich W. DCM = W. DCB seyn. Im zweiten Falle wäre W. ACD + W. DCN (wieder nach §. 41.) = 2 R; daher W. DCN = W. DCB.

§. 43.

Zusatz. Alle Winkel, welche in dem nämlichen Puncte einer geraden Linie ihren gemeinsamen Scheitelpunct haben und auf einer Seite derselben liegen, sind zweien rechten Winkeln gleich.

In (Fig. 34) ist W. ACD + W. DCE + W. ECF + W. FCB = 2 R.

§. 44.

Zusatz. Wenn einer von zwei Nebenwinkeln ein spitzer ist, so muß der andere stumpf seyn, und

umgekehrt. Denn jenem fehlt so viel an dem rechten, als dieser mehr beträgt als der rechte, und umgekehrt.

§. 45.

Lehrsatz. Jeder Winkel ist seinem gegenüberliegenden Scheitelwinkel gleich.

Wenn sich (Fig. 35.) die geraden Linien AB und DE in C schneiden, so ist W. ACD = W. ECB und W. ACE = W. BCD.

Beweis. Denn jeder der zwei Paare von Scheitelwinkeln macht mit einem seiner anliegenden Nebenwinkel die nämliche Summe von zwei rechten Winkeln aus. (§. 41.)

§. 46.

Zusatz. Wenn mehrere Winkel einen gemeinschaftlichen Scheitelpunct haben und rings um denselben herum liegen, so ist ihre Summe vier rechten Winkeln gleich.

Sämtliche Winkel (Fig. 36.) ACD, DCE, ECB, BCG, GCF und FCA betragen zusammen vier rechte Winkel.

§. 47.

Lehrsatz. Der Aussenwinkel an jedem Dreiecke ist größer, als jeder der beiden innern im Dreiecke, wovon keiner sein Nebenwinkel ist.

Wenn ABC (Fig. 37) das gegebene Dreieck, und ACD der durch Verlängerung der Seite BC entstandene Aussenwinkel ist, so muß W. ACD > W. BAC, und W. ACD > W. ABC seyn.

Beweis. Daß W. ACD > W. BAC sei, fließt aus der Congruenz der Dreiecke AEB und CEF, worin (per construct) AE = CE, BE = EF und W. AEB = W. CEF (§. 45.) und somit auch W. BAE = W. ECF (kleiner als W. ACD) ist.

Daß aber auch W. ACD > W. ABC sei, ergibt sich durch die Construction in (Fig. 38), wodurch, nach ähnlichen Gründen, das Dreieck AEB dem Dreiecke FEC congruent, folglich W. B = W. BCF = W. DCH ist.

§. 48.

Anmerkung. Der Beweis dieses wichtigen Satzes muß an allen möglichen Aussenwinkeln des gegebenen Dreiecks geübt werden, damit der Anfänger den Geist erfasse und das Wesentliche vom Zufälligen unterscheiden lerne. Es sind zwölf verschiedene Fälle möglich.

§. 49.

Zusatz. In jedem Dreiecke müssen irgend zwei Winkel zusammengenommen kleiner, als zwei Rechte seyn.

In dem Dreiecke MNP (Fig. 39.) ist W. N + W. P, oder W. P + W. M, oder W. M + W. N < 2 R.

Beweis. Denn da W. MPD > W. MNP (§. 47.) und W. MPD + W. MPN = 2 R (§. 41.)

ist, so muß auch W. MNP + W. MPN $<$ 2 R seyn. Von den übrigen zwei Winkelpaaren des Dreiecks gilt ein ähnlicher Beweis.

§. 50.

Zusatz. I. Im rechtwinkeligen Dreiecke muß jeder der zwei andern Winkel ein spitzer seyn.

II. Auch im stumpfwinkeligen Dreiecke ist jeder der übrigen spitz.

III. Ein Dreieck kann aber auch drei spitze Winkel haben. Nun heißt es spitzwinkelig.

IV. In Rücksicht der Winkel sind nur rechtwinkelige, spitzwinkelige und stumpfwinkelige Dreiecke möglich.

V. Das gleichseitige Dreieck muß spitzwinkelig seyn.

VI. Das gleichschenkelige Dreieck kann recht- spitz- und stumpfwinkelig seyn.

VII. Eben dieses gilt vom ungleichseitigen Dreiecke.

§. 51.

Zusatz. Von einem in einer gegebenen geraden Linie angenommenen Puncte gibt es nur ein Loth auf diese Linie. Eben so auch von einem ausserhalb der Linie gegebenen Puncte.

Wenn (Fig. 40.) CD und FE Lothe auf AB sind, so gibt es weder durch C, noch durch F ein anderes Loth auf AB.

Die Hülfslinien führen leicht zum indirecten Beweise, da, wenn W. DCA = R ist, nicht auch

W. GCA oder W. HCA = R seyn kann. — Eben so wenig können bei M und N rechte W. seyn, wenn W. FEB = R ist (§. 50, I.)

§. 52.

Zusatz. I. Wenn in dem gleichschenkeligen Dreiecke eine gerade Linie von der Spitze auf die Mitte der Grundlinie gezogen wird, so steht sie senkrecht auf ihr und halbirt den Winkel an der Spitze.

In (Fig. 41.) sei AB = AC, BD = CD, so ist W. ADB = W. ADC = R, auch W. BAD = W. CAD (nach §. 31).

II. Ein Loth von der Spitze des gleichschenkeligen Dreiecks auf die Grundlinie, halbirt diese.

Wenn W. ADB = W. ADC = R ist, so muß auch BD = CD seyn (nach I. und §. 51).

III. Ein aus der Mitte der Grundlinie auf sie errichtetes Loth geht durch die Spitze des gleichschenkeligen Dreiecks, und halbirt den Winkel an der Spitze.

Wenn BD = CD und DA ein Loth auf BC ist, so liegt in DA die Spitze des Dreiecks BAC, und es ist W. BAD = W. CAD. (nach II. und §. 51).

IV. Eine Linie, welche im gleichschenkeligen Dreiecke den Winkel an der Spitze halbirt, halbirt auch, gehörig verlängert, die Grundlinie und steht lothrecht auf ihr.

Wenn W. BAD = W. CAD, so ist auch BD = CD und W. ADB = W. ADC = R (nach §. 22).

§. 53.

Lehrsatz. In jedem Dreyecke liegt der größern Seite der größere Winkel gegenüber.

Es sei (Fig 42.) im dem Dreiecke EDF die Seite DF > DE, so ist W. DEF > W. DFE.

Beweis. Wenn DG = DE genommen und EG gezogen wird, so ergibt sich die Wahrheit des Satzes sehr leicht aus §. 24 und §. 47.

§. 54.

Anmerkung. Es ist wichtig, diesen Beweis auch für die übrigen ungleichen Seiten eines ungleichseitigen Dreiecks von den Anfängern führen zu lassen. Eine Folge daraus ist, daß in jedem ungleichseitigen Dreiecke der größten, mittlern und kleinsten Seite, auch der größte, mittlere und kleinste Winkel gegenüberliegt.

§. 55.

Lehrsatz. In jedem Dreiecke steht auch dem größern Winkel die größere Seite entgegen.

Es sei in dem Dreiecke NMP (Fig. 43.) W. N > W. P, so ist auch PM > NM.

Beweis. Dieser kann leicht direct durch die gezogene Hülfslinie ND, welche W. DNP = W. P macht, wodurch ND = DP und NM + MD > ND wird, nach §. 28 u. §. 16; und indirect vermittelst §. 24 u. §. 53 dadurch geführt werden, daß bei der Annahme MP = MN, oder MP < MN ein Widerspruch mit der Voraussetzung: W. N > W. P entsteht.

§. 56.

Anmerkung. I. Auch diese Beweise müssen für die übrigen Winkel durchgeführt werden. Es ergibt sich daraus, daß dem größten, mittlern und kleinsten Winkel im Dreiecke auch die größte, mittlere und kleinste Seite gegenüberliegt.

II. Eben so erwiesen ist nun auch, daß in jedem Dreiecke der kleinern Seite der kleinere Winkel, und dem kleinern Winkel die kleinere Seite gegenüberliegt.

III. Der Lehrer wird diese Sätze sehr nützlich auf rechtwinkelige und stumpfwinkelige Dreiecke anwenden.

§. 57.

Zusatz. Von einem Puncte ausserhalb einer geraden Linie ist die senkrechte auf sie die kürzeste; jede schiefe Linie aber um so größer, je schiefer sie ist.

Es sey (Fig. 44.) CD lothrecht auf AB, so ist $CD < CE$, $CE < CF$, $CF < CG$. Denn W. $CDE >$ W. CED (§. 50, I.) W. $CEF >$ W. CFE (§. 50, II.) W. $CFG >$ W. CGF (§. 50, II.) daher tritt §. 55 ein. — Auch kann man es indirect beweisen.

§. 58.

Erklärung. Da man sich unter dem Abstande eines Puncts von einer geraden Linie die kürzeste Linie denkt, welche von ihm nach ihr möglich ist, so bestimmt dieses Loth den Abstand des Puncts von der Linie.

§. 59.

Zusatz. Wenn von einem Puncte ausserhalb einer geraden Linie ein Loth auf sie gezogen ist, so

gibt es von diesem Puncte auf jeder Seite des Lothes eine schiefe Linie, deren eine der andern gleich ist.

Wenn man (Fig. 44.) DH = DF macht, und CH und CF zieht, so ist CH = CF; setzt man DK = DG, so ist CK = CG. Denn es entstehen (nach §. 22.) jedesmal congruente Dreiecke.

§. 60.

Zusatz. Auch gibt es von diesem Puncte ausser der Linie auf jeder Seite des Lothes nur eine schiefe Linie, welche entweder eine bestimmte Größe hat, oder mit jener ersten Linie einen bestimmten, spitzen oder stumpfen, Winkel bildet.

Wenn CH = CF eine bestimmte Größe hat, so gibt es von C nach AB keine andere gerade Linie mehr von dieser Größe. Denn es ist, wegen W. CEF > W. CFE, auch CF > CE (§. 55.) und, wegen W. CFG > W. CGF, auch CG > CE (§. 55.)

Wenn W. CKD = W. CGD bestimmt ist, so macht jede andere gerade von C nach AB einen andern Winkel mit ihr. Denn es muß immer W. CED > W. CFD und W. CFD > W. CGD seyn (§. 47.).

§. 61.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken eine Seite, ein ihr anliegender und ein ihr gegenüberliegender Winkel des einen so groß ist, als eben diese Stücke in einem andern Dreiecke, so sind beide Figuren congruent.

Es sei in den Dreiecken (Fig. 45.) DEF und ABC die Seite EF = BC, W. DEF = W. ABC und W. D = W. A, so congruiren die Dreiecke.

Beweis. Denn es gibt von F und C nur eine Linie auf ED und BA, welche gleiche Winkel D = A bildet. (§. 60.)

§. 62.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und ein der einen Seite gegenüberliegender Winkel des einen, zweien Seiten und dem ähnlich liegenden gegenüberstehenden Winkel des andern Dreiecks einzeln gleich sind, so sind die Dreiecke nicht immer congruent, sondern man kann aus den angegebenen Stücken zweierlei Dreiecke bilden.

Wenn man sich in dem Dreiecke ABC (Fig. 46.) die Seiten BC und AB und den W. C, der Größe nach, als unveränderlich denkt, so läßt sich noch ein zweites Dreieck ADC bilden, welches mit dem Dreiecke ABC eine Seite AC, die zweite Seite AD = AB und den W. C gemein hat.

Soll also in diesem Falle die Zweideutigkeit gehoben werden, so muß man wissen, ob der W. ABC, welcher der Seite AC gegenüberliegt, ein stumpfer oder ein spitzer ist. Ist er stumpf, so gibt es aus AC, AB und W. C nur ein stumpfwinkeliges Dreieck ABC; ist er spitz, so kann aus AC, AB und W. C nur ein Dreieck ADC construirt

werden, welches aber in Bezug auf den Winkel DAC entweder recht- oder spitz- oder stumpfwinkelig seyn kann, wie sich leicht durch Zeichnungen erläutern läßt.

§. 63.

Anmerkung. I. Es ist sehr zu rathen, daß man für die zwei vorhergehenden §§. sämtliche Voraussetzungen an den gegebenen Dreiecken durchführe, wodurch eine lehrreiche Uebung bezweckt wird.

II. Da jedes Dreieck drei Seiten und drei Winkel hat, so sind durch das Vorhergehende folgende Sätze erwiesen:

1. Drei Seiten bestimmen die Natur eines Dreiecks,
2. Zwei Seiten und der dazwischen liegende Winkel ebenfalls,
3. Zwei Seiten und ein Winkel, welcher nicht der eingeschlossene ist, bestimmen zweierlei Dreiecke,
4. Eine Seite und die zwei daran liegenden Winkel bestimmen nur ein Dreieck,
5. Eine Seite, ein anliegender, und ein ihr entgegenstehender Winkel ebenfalls,
6. Drei Winkel bestimmen nicht ein Dreieck, sondern (man sehe unten §. 199 u. §. 203, I.) unzählig vielerlei Dreiecke.

V. Die Lehre von den Parallellinien.

§. 64.

Aufgabe. An einem Puncte, der in einer geraden Linie oder an ihrem Ende gegeben wird, einen Winkel zu bilden, der einem gegebenen gleich ist.

Es sey (Fig. 47.) MN die gegebene gerade Linie und M der in ihr genommene Punct. Man soll einen Winkel NMP construiren, der dem gegebenen Winkel CDB gleich ist.

Auflösung. Diese beruht auf der Construction der beiden congruenten gleichschenkeligen Dreiecke AMR und EDG, worin MR = MA = DG = DE, auch RA = GE genommen und folglich (§. 31.) W. AMR = W. EDG ist.

§. 65.

Aufgabe. Wenn zwei gerade, in einerlei Ebene liegende Lirien durch eine dritte so geschnitten werden, daß ein äusserer Winkel dem zugehörigen innern gleich ist, so sind auch die Wechselwinkel gleich, und die Summe der beiden innern Winkel beträgt zwei Rechte.

Es werden die Linien AB (Fig. 48.) und CD von der schneidenden EF in G und H durchschn.tten, und es sei der äussere W. EGB = dem innern W. EHD; so sind auch die Wechselwinkel gleich, oder W. AGF = W. EHD und die Summe der innern Winkel, d. h. W. BGH + W. GHD = 2 R.

Beweis. Denn Scheitelwinkel sind einander gleich (§. 45.) und zwei Nebenwinkel betragen zusammen zwei rechte Winkel (§. 41.)

Eben daher folgt auch, daß W. AGH + W. CHG = 2 R und daß BGH = W. CHG ist.

§. 66.

Zusatz. Umgekehrt: Wenn die beiden innern Winkel zwei Rechte betragen, so sind auch die Wechselwinkel einander und die äussern Winkel den innern gleich.

Desgleichen: Wenn die Wechselwinkel gleich sind, so betragen die innern Winkel zwei Rechte, und die äussern Winkel sind den innern gleich.

Die Erläuterung und der Beweis folgt leicht aus (Fig. 84.)

§. 67.

Lehrsatz. Wenn zwei gerade, in der nämlichen Ebene liegende Linien von einer dritten so durchschnitten werden, daß die Summe der innern Winkel zwei Rechte beträgt, so können jene Linien, bei jeder Verlängerung nach beiden Seiten, niemals zusammenlaufen.

Es sei (Fig. 48.) W. BGH + W. GHD = 2 R, so können die geraden Linien AB und CD, wenn sie gleich über B und D, oder über A und C ohne Ende verlängert werden, nie zusammentreffen.

Beweis. Denn wenn sie gegen B und D zusammenliefen, so entstände über der Grundlinie GH ein Dreieck, worin zwei Winkel (bei G und H) zwei Rechte betrügen, welches unmöglich ist (§. 49.). Ein Gleiches gilt für die Verlängerung über A und C.

§. 68.

Zusatz. Wenn zwei gerade, in einerlei Ebene liegende, von einer dritten durchschnittene Linien gleiche innere und äussere Winkel, oder gleiche Wechselwinkel bilden, so können sie ebenfalls, auf jeder Seite verlängert, nie zusammentreffen. (§. 65, 66.) Erläuteruug an Fig. 48.

§. 69.

Anmerkung. Daß diese geraden Linien Parallellinien oder gleichlaufende Linien heissen, ist, so wie auch die Bedeutung der seither genannten Winkel, schon aus der Anschauungslehre bekannt. In der Wissenschaftslehre mußte aber sowohl die Möglichkeit jener Linien, als auch die Bedingung ihres Gleichlaufens nachgewiesen werden.

§. 70.

Lehrsatz. Wenn zwei gerade, in einerlei Ebene liegende Linien von einer dritten so durchschnitten werden, daß die Summe der innern Winkel auf einer Seite der schneidenden Linie kleiner als zwei Rechte ist, so müssen jene Linien, hinlänglich verlängert, auf dieser Seite einmal zusammentreffen.

Es werden (Fig. 49.) die geraden Linien AB und CD von EF in G und H so geschnitten, daß W. BGH + W. GHD $<$ 2 R, so müssen die Linien GB und HD, über B und D genugsam verlängert, einmal zusammenlaufen.

Beweis. Wenn man durch G eine Linie GN legt; so, daß W. NGH + W GHD = 2 R, so muß GB zwischen GN und HD fallen, auch GN mit HD gleichlaufend seyn. Da sich nun diese GB, bei ihrer fortgesetzten Verlängerung, immer mehr von GN entfernt, (so zwar, daß ihr Abstand von GN einmal größer als jede angegebene Linie wird, wie ich in der unten (§. 71, a) bemerkten Schrift S. 267 u. f. zuerst bewiesen habe) und immer näher gegen HD rückt, so folgt aus dieser Richtung der geraden Linie GB und aus ihrer Lage gegen HD, daß beide sich einmal durchschneiden werden.

§. 71.

Anmerkung. I. Für Freunde einer etwas strengern Darstellung theile ich Folgendes mit. 1. Wenn (Fig 49.) W. BGH + W. GHD < 2 R, so muß einer dieser Winkel < R seyn. Es sey W. GHD < R, so denke man sich von G auf HD ein Loth Ga von a auf GB ein Loth ab, von b auf HD das Loth bc, von c auf GB das Loth cd und so abwechselnd die Lothe de, ef, fg u. s. w., welche man leicht construiren kann.

II. Hier ist leicht zu zeigen, das Ga > ab, ab > bc, bc > cd, cd > de sei u. s. f. Auch wird man finden, daß, wenn z. B. zwischen b und d ein willkührlicher Punct α genommen und aus diesem ein Loth auf HD gefällt wird, dieses Loth $\alpha\beta$ zwischen c und e eintreffen, auch $\alpha\beta$ < bc und $\alpha\beta$ > de seyn muß.

III. Daher nähert sich die GB in jedem Puncte von G bis f immer mehr der Linie HD. Wenn aber eine gerade Linie einer andern, in derselbigen Ebene

liegenden, geraden näher rückt, so lehrt die aus der Anschauung hervorgehende Natur der geraden Linie, daß beide einmal zusammenlaufen müssen.

§. 71. *a.*

Anmerkung. Daß diese Beweise den strengen Forderungen, welche man an eine vollkommen berichtigte Theorie der Parallelen macht, nicht entsprechen, wird nicht geläugnet. Aber entschieden ist es, daß kein bis jetzt erschienenes System ein vollkommen befriedigendes ist. Daher beruht jede Parallentheorie in der That auf Gründen der Anschauung, die allerdings unwidersprechlich sind. Dies ist die Ursache, warum hier der einfachste Weg allen künstlichen, die doch nicht mehr leisten, vorgezogen worden ist. Wer sich weiter hierüber belehren will, lese meine Critik der Parallelentheorie. Jena, b. Cröker 1807, worin siebenzehn verschiedene Versuche dargestellt und critisch geprüft worden sind.

§. 72.

Zusatz. Auch wenn der äussere Winkel größer, als sein innerer, oder der eine Wechselwinkel dem andern ungleich ist, so müssen die geraden Linien auf der Seite, wo der größere äussere oder der kleinere Wechselwinkel liegt, gehörig verlängert, einmal zusammenlaufen.

Es sei W. EGB > EHD, oder W. AGH > GHD, so müssen GB und HD, über B und D hinreichend verlängert, einmal zusammenlaufen.

Denn jetzt ist die Summe der innern Winkel kleiner als zwei rechte, und der vorige Beweis (§. 70, 71.) tritt wieder ein.

§. 73.

Lehrsatz. Wenn zwei gerade, in der nämlichen Ebene liegende Linien so von einer dritten durchschnitten werden, daß entweder die Summe der innern Winkel größer als zwei Rechte, oder daß der äussere Winkel kleiner als sein innerer, oder daß ein Wechselwinkel kleiner, als der andere ist, so müssen die Linien auf der Seite dieser beiden innern Winkel, oder des größern innern, oder des größern Wechselwinkels auseinanderlaufen.

Wenn (Fig. 49.) W. AGH + CHG > 2 R, oder W. EGA < W. EHC, oder W. BGH < W. GHC, so sind die Linien GA und HC nach dieser Richtung auseinanderlaufend.

Beweis. Denn sie müssen, da unter diesen Bedingungen, wie man leicht zeigen kann, die Summe der innern Winkel BGH und DHG weniger als zwei Rechte beträgt, gegen GB und HD zusammenlaufende seyn. (§. 70, 71.)

§. 74.

Aufgabe. Durch einen Punct ausserhalb einer gegebenen geraden Linie eine andere gerade zu ziehen, welche mit der gegebenen gleichlaufend ist.

Es sei CD (Fig. 48.) die gegebene Linie, und G der gegebene Punct. Man soll die mit CD gleichlaufende AGB finden.

Auflösung und Beweis beruht darauf, daß, nachdem man durch G die willkührliche schneidende Linie EGF gezogen hat, W. EGB = W. EHD gemacht wird. (§. 68.)

§. 75.

Zusatz. Wenn zwei Parallelen von einer dritten willkührlich geschnitten werden, so beträgt die Summe der innern Winkel zwei Rechte, der äussere Winkel ist dem innern gleich, und die Wechselwinkel sind einander gleich.

Die Parallellinien AB und CD (Fig. 48.) werden von EF in den willkührlichen Puncten G und H geschnitten, so ist W. BGH + W. GHD = 2 R, W. EGB = W. EHD und W. AGH = W. GHD.

Denn wenn dieses nicht wäre, so könnten die Linien nicht gleichlaufend seyn. (§. 70, 71, 72.)

§. 76.

Zusatz. Durch einen gegebenen Punct ausserhalb einer geraden Linie kann es nur eine einzige gleichlaufende mit ihr geben.

Wenn (Fig. 49.) MGN mit CD gleichlaufend ist, so kann weder AGB noch LGQ gleichlaufend mit ihr seyn.

Denn wenn MN mit CD gleichlaufend ist, so muß W. EGN = W. EHD seyn (§. 75.). Wäre nun auch GQ oder GB mit eben dieser CD gleichlaufend, so müßte auch W. EGQ = W. EHD und W. EGB = W. EHD seyn, was widersprechend ist.

§. 77.

Lehrsatz. Zwei Parallellinien haben in allen Puncten einerlei Abstand von einander, oder sind gleichweit abstehende Linien.

Es sei (Fig. 50.) DE mit FG gleichlaufend, A und B seien zwei willkührliche Puncte in DE, auch AC und BH zwei Lothe auf FG, so ist AC = BH.

Beweis. Wenn man die Querlinie BC zieht, so sind die Dreiecke BAC und CHB congruent, weil die zwei Paare der an BC liegenden Wechselwinkel einander gleich sind. (§. 75 u. §. 26.)

§. 78.

Zusatz. Alle Linien, welche von einer Parallele ausgehen und auf der andern senkrecht stehen, sind auch lothrecht auf der ersten.

Wenn AC (Fig. 50.) und BH auf FG senkrecht sind, so ist auch W. CAB = W. HBA = R. Denn wäre z. B. W. CAB < R, so könnte DE nicht mit FG parallel seyn (§. 70 u. 73.)

§. 79.

Zusatz. Wenn zwei Parallellinien von zwei andern Parallelen in vier Puncten geschnitten werden, so sind ihre gegenüberliegende Stücke gleich.

Es werden (Fig. 51.) die Parallelen AB und CD von den Parallelen EF unv GH in den Puncten L, N, O und M geschnitten, so ist LN = MO und LM = NO.

Beides wird klar, wenn man die Querlinie LO zieht, da nun die Dreiecke LNO und OML congruent sind (§. 26.).

VI. Die Vierecke und ihre verschiedene Arten.

§. 80.

Aufgabe. Ein Quadrat zu construiren, wovon eine Seite gegeben ist.

Man soll (Fig. 52.) über die Linie AB ein Quadrat construiren.

Auflösung. Man verlängere BA willkührlich nach E, errichte aus A das Loth AC = AB (§. 38.) ziehe CB und trage das Dreieck CAB nach CDB, so ist ABDC das verlangte Quadrat.

Beweis. Da die Dreiecke CAB und CDB congruent sind, so ist CA = AB = BD = DC und W. D = R. Da aber, wegen W. CBA = W. BCD, die Seite BA mit CD gleichlaufend ist, so muß auch W. ACD und W. ABD = R seyn (§. 75.)

§. 81.

Aufgabe. Eine Raute zu construiren, wenn ihre Seite und ein spitzer (oder stumpfer) Winkel gegeben ist.

Auflösung. Es sei AB (Fig. 53.) die gegebene Seite und BAC der gegebene Winkel, so wird nach dem vorigen §. die Raute GHLM, worin

MG = GH = AB und W. G = W. A ist, leicht zu construiren seyn. Der Beweis ist einfach.

§. 82.

Aufgabe. Ein Rechteck zu construiren, wozu zwei Seiten gegeben sind.

Auflösung. Wenn AB und CD (Fig. 54.) die gegebenen Seiten sind, so wird nach dem Vorigen, das Rechteck MOQP, worin MO = CD, MP = AB und W. PMO = R ist, sogleich construirt werden können. Der Beweis ist dem vorigen (in §. 80.) ganz ähnlich.

§. 83.

Aufgabe. Eine Rhomboide zu construiren, wovon zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Auflösung. Es seien (§. 55.) AB und CD die Seiten, EFG der gegebene Winkel, so wird aus diesen Stücken die Rhomboide MNOP, worin MN = AB und PM = CD ist, nach Anleitung des Vorigen, leicht construirt werden. Auch dieser Beweis ist einfach.

§. 83. *a.*

Anmerkung. Um ein Parallelogramm im Allgemeinen zu construiren, construire man zwei gleiche Parallellinien und verbinde ihre beide Anfangspuncte und ihre zwei Endpuncte durch gerade Linien.

§. 84.

Aufgabe. Ein Paralleltrapez zu construiren.

Auflösung. Aus Verbindung der Endpuncte (Fig. 56.) A und C, B und D zweier ungleichen Parallelen AB und CD durch die geraden AC und BD entspringt die verlangte Figur ABDC. Denn wäre AB = CD, so müßte auch AC = BD seyn, wie man leicht erkennt, wenn eine Querlinie, z. B. AD gezogen würde, wodurch die Dreiecke ABD und ACD congruent wären (§. 26. u. §. 76.)

§. 85.

Aufgbe. Ein Trapez zu construiren.

Auflösung. Es entsteht, wenn die Endpuncte D und F (Fig. 57.) E und G zweier nicht gleichlaufenden ungleichen Linien DE und FG durch gerade Linien DF und EG verbunden werden. Doch darf die Summe der Winkel D und E, oder F und G keine zwei Rechte betragen, weil sonst DF mit EG gleichlaufend und das Viereck nun ein Paralleltrapez wäre.

§. 86.

Lehrsatz. Es kann nur viererlei Arten von Parallelogrammen geben.

Beweis. Denn entweder sind zwei, irgend einen Winkel des Vierecks bildende Linien unter sich gleich oder ungleich und in jedem dieser zwei Fälle kann jener Winkel entweder ein rechter oder ein schiefer seyn.

§. 87.

Lehrsatz. Jedes Parallelogramm wird durch die Diagonallinie in zwei congruente Dreiecke getheilt.

Beweis. Folget leicht aus Betrachtung von Fig. 52, 53, 54 und 55. aus §. 26. u. §. 76.

§. 88.

Zusatz. Eben so klar ist es, daß man aus zwei gegebenen congruenten Dreiecken, welche gehörig an einander gelegt werden, ein Parallelogramm bilden kann. Dieses kann auf dreifach verschiedene Art geschehen und sehr leicht durch Zeichnungen erläutert werden.

§. 89.

Lehrsatz. Wenn man in der Diagonallinie eines Parallelogramms einen willkührlichen Punct annimmt, und durch denselben mit zwei, einen Winkel einschliesenden Seiten dieser Figur zwei gleichlaufende Linien zieht, so sind die beiden kleinen Parallelogramme, wodurch die Diagonallinie nicht geht, gleich groß an Fläche.

Es sei (Fig. 58.) ABDC das gegebene Parallelogramm, BC die Diagonale, E der willkührliche Punct, IEG mit AB und FEH mit AC gleichlaufend, so ist das Parallelogramm AFEI dem Parallelogramme EGDH an Fläche gleich.

Beweis. Denn es ist Dr. CAB dem Dr. CDB; Dr. CIE dem Dr. CHE und Dr. EFB dem Dr. EGB congruent (§. 87.)

§. 89. *a*.

Anmerkung. I. Da die Parallelogramme AFEI und EGDH gleiche Flächen, aber verschiedene Gestalt haben, so sind sie nicht congruent, sondern bloß gleich.

II. Nähme man den Punct E in der Mitte von BC, so entständen zwei congruente Parallelogramme, wie sich leicht erweisen läßt.

III. Wäre das gegebene Parallelogramm ein Quadrat, und man nähme E nicht in der Mitte der Diagonallinie, so entständen zwei ungleiche Quadrate und zwei congruente Rechtecke.

VII. Die drei Winkel im Dreiecke. Maß der Winkel.

§. 90.

Lehrsatz. In jedem Dreiecke ist die Summe der drei Winkel zweien Rechten gleich.

Es sei (Fig. 59.) ABC das gegebene Dreieck, so ist W. ABC + W. BCA + W. CAB = 2 R.

Beweis. Folget entweder aus der durch A mit BC parallel gezogenen DE, oder aus der mit BA gleichlaufenden CH und der nach I verlängerten BC nach §. 76. und §. 41.

§. 91.

Zusatz. Der Aussenwinkel an jedem Dreiecke ist der Summe der beiden innern, ihm entgegenstehenden Winkel des Dreiecks gleich.

In (Fig. 59.) ist W. ACI = W. CAB + W. ABC.

Der Beweis beruht darauf, daß W. ACI + W. ACB = 2 R und W. ACB + W. B + W. BAC auch = 2 R ist (§. 41 u. §. 90.) und kann zur Uebung an allen möglichen Aussenwinkel geführt werden.

§. 91. *a.*

Zusatz. Wird im gleichschenkeligen Dreiecke einer der gleichen Schenkel über die Spitze des Dreiecks verlängert, so ist der entstehende Aussenwinkel doppelt so groß, als einer der Winkel an der Grundlinie. Wäre z. B. (Fig. 59.) AC = CB, so müßte auch W. ACI = 2 W. B seyn.

§. 92.

Zusatz. In dem gleichseitigen Dreiecke ist jeder Winkel = $\frac{2}{3}$ R.

§. 93.

Zusatz. I. In dem rechtwinkeligen Dreiecke ist die Summe der zwei spitzen Winkel = R. Folglich ist der eine um so viel kleiner als der halbe Rechte, um so viel der andere größer als ein halber Rechter ist.

II. In dem gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreiecke ist jeder spitze Winkel = $\frac{1}{2}$ R.

§. 94.

Grundsatz. Jede Linie kann, als stetige Größe, in irgend eine beliebige Menge gleicher

Theile eingetheilt werden. Dieser Satz spricht nur die Möglichkeit einer solchen Theilung; nicht aber ihre wirkliche Darstellung aus.

§. 94. *a.*

Anmerkung. Daß hier von einer bloß möglichen Theilung der geraden und krummen Linien gesprochen wird, ohne durch die wirkliche, auf bewiesene Vodersätze gegründete Construction nachzuweisen, wie sie ausgeführt werden kann, ist kein Einwurf gegen die Strenge der geometrischen Methode. Denn für's Erste kann ein System der Elementar-Geometrie ohne das Messen der Winkel durch Grade bestehen, wie dieses z. B. aus den Elementen des Euclides bekannt ist, und für's Zweite werden weiter unten die Gründe entwickelt, woraus eine solche theoretische Theilung hervorgeht.

§. 95.

Erklärung. Man nehme an, ein Quadrant der Kreisperipherie sey in 90 gleiche Theile getheilt, und nenne einen dieser Theile einen Grad, so enthält der Halbkreis 180 und der ganze Umfang 360 solcher Grade. Anstatt des Wortes: Grad, setzt man eine kleine Nulle oben zur Rechten, und schreibt also 90°, 180°, 360°. Den Grad denkt man sich wieder in 60 gleiche Theile abgetheilt, und nennt einen dieser Theile eine Minute. Der Minute sechzigster Theil heißt Secunde. Die Zeichen der Minuten und Secunden sind ′, und ″; z. B. 18′ (achtzehn Minuten) oder 34″ (vier und dreisig Secunden.)

§. 96.

Erklärung. Aus dem Puncte C (Fig. 60.) der geraden AB sei mit dem Halbmesser CE der Halbkreis EFN beschrieben, und in C das Loth CF errichtet, so ist EHF = FMN, d. h. jeder Bogen ist ein Quadrant. Wenn nun der kleine Bogen ED einen Grad, d. h. den 90sten Theil des Quadranten EHF vorstellt, so ist klar, daß hier 90 solcher Bogen von E in EHF bis zu F liegen. Denkt man sich von ihren sämmtlichen Endpuncten gerade Linien nach dem Mittelpuncte C, so entstehen an diesem Puncte C nunmehr 90 kleine Winkel, deren jeder dem kleinen Winkel ECD gleich ist. Auch wird die Ebene des Quadranten aus der Summe dieser 90 kleinen Winkel bestehen. Gesetzt nun, der Bogen EDH enthielte 46 kleine Bogen ED, d. h. 46 Grade, so würden auch 46 kleine Winkel ECD in der Winkelfläche ECH enthalten seyn. Gleichwie also der Gradbogen ED den Bogen EHF ausmißt, so würde auch der Gradwinkel ECD den Winkel ECH ausmessen, und man kann sagen, der Gradwinkel ECD sei das Maß des Winkels ECH. Da aber die Zahl dieser Gradwinkel der Zahl der Gradbogen vollkommen gleich ist, so sagt man, der Winkel ECH werde durch den Bogen EDH zwischen seinen Schenkeln gemessen. Hieraus ist klar, inwiefern Bogen das Maß der Winkel seyn können, obgleich Bogen und Winkel verschiedenartige Größen sind.

§. 97.

Zusatz. I. Da der Grad der 90te Theil des Viertelkreises ist; diese Viertelkreise aber größer oder kleiner sind, je nachdem sie mit größern oder kleinern Halbmessern beschrieben werden, so sind auch die Grade in größern Kreisen größer, in kleinern Kreisen kleiner. Demungeachtet sind alle Winkel, zwischen deren Schenkel Bogen von gleich-vielen Graden liegen, einander gleich, obwohl diese Grade an Größe ungleich sind.

Es seien (Fig. 61.) W. ACH = R, W. PCH < R, und mit den ungleichen Halbmessern CE und CB die Quadranten EID und BMA beschrieben, so zählt der Bogen EI so viele Grade des kleinen Quadranten, als der Bogen BM nach dem größern enthält; d. h. wenn EI z. B. der dritte Theil von EID wäre, so müßte BM der dritte Theil von BMA seyn. – Desgleichen würden auch die Bogen FN und GO Drittheile von den ihnen zugehörigen Quadranten seyn.

II. Daher kann jeder zwischen den Schenkeln eines Winkels mit willkührlichem Halbmesser beschriebene Bogen als das Maß dieses Winkels angesehen werden.

Sind diese Bogen gleich, so müssen es auch die, ihnen zugehörigen Winkel seyn, und umgekehrt.

§. 98.

Zusatz. I. Alle Nebenwinkel haben 180° zu ihrem Maße. Wenn man den einen in Graden kennt, so ist auch der andere; oder, wenn es mehrere sind, die Summe der übrigen bekannt.

II. Alle Winkel, welche rings um einen gemeinschaftlichen Punct herumliegen, haben 360° zum Maße.

III. Wenn man von zwei Paar Scheitelwinkeln nur einen Winkel nach der Menge der in ihm enthaltenen Graden kennt, so sind alle übrige in Graden bekannt. Beispiele sind leicht zu rechnen.

§. 99.

Zusatz. I. Die drei Winkel eines jeden Dreiecks sind zusammen = 180°. Denn jeder rechte Winkel ist = 90°.

II. Wenn man in einem Dreiecke einen in Graden gegebenen Winkel von 180° abzieht, so bleibt die Summe der beiden andern Winkel übrig; und wenn man die Summe zweier Winkel von 180° wegnimmt, so bleibt der dritte Winkel zum Reste.

III. Im gleichschenkeligen Dreiecke findet man aus einem im Graden gegebenen Winkel jeden der zwei übrigen. Wird der Winkel an der Spitze von 180° abgezogen und der Rest halbirt, so ist diese Hälfte der Winkel an der Grundlinie. Zieht man aber den doppelten Winkel an der Grundlinie von 180° ab, so bleibt der Winkel an der Spitze übrig.

IV. Im gleichseitigen Dreiecke ist jeder Winkel = 60 Grade.

V. Im rechtwinkeligen Dreiecke betragen die zwei spitzen Winkel zusammen 90°. Ist der eine gegeben, so wird der andere leicht gefunden.

VI. Im gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreiecke ist jeder spitze Winkel = 45°.

§. 99. *a*.

Anmerkung. Es ist rathsam, diese Sätze (§. 98. u. 99.) in Rechnungs-Beispielen durchzuüben. Man kann den Winkeln willkührliche Größen in Graden und Minuten geben.

§. 100.

Aufgabe. Durch den Endpunct einer geraden Linie ein Loth auf dieselbe zu errichten.

Die Linie BA (Fig. 62.) ist gegeben. Man soll durch A ein Loth auf sie construiren.

Auflösung. Das gleichseitige Dreieck ACB, und CD = BC führt zum Zwecke.

Beweis. W. DAB = 60° + 30° = 90° (§. 99, IV und §. 91, a.)

VIII. Gleichheit der Parallelogramme und Dreiecke, und ihre Verwandlung.

§. 101.

Lehrsatz. Zwei Parallelogramme, welche gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben, sind gleich am Flächeninhalte.

Es seien (Fig. 63.) ABDC und EFHG zwei Parallelogramme, worin CD = GH und die Höhe AM = EL ist, so muß die Fläche ABDC der Fläche EFHG gleich seyn.

Beweis. Wenn die Parallelogramme mit ihren gleichen Grundlinien in einander, und sie selbst auf einerlei Seiten dieser Grundlinien in einerlei Ebene gelegt werden, so sind drei verschiedene Lagen (Fig. 64, 65 und 66.) möglich. In Fig. 64. ist Dr. ABC dem Dr. BED congruent (§. 31.) folglich Dr. ABC + Dr. BCD = Dr. BED + Dr. BCD.

In Fig. 65. ist Dr. AEC dem Dr. BFD congruent (§. 31.), folglich Dr. AEC + EBDC = Dr. BFD + EBDC.

In Fig. 66 ist Dr. AEC congruent dem Dr. BFD (§. 31.) folglich auch Dr. AEC — Dr. BEG + Dr. CGD so groß, als Dr. BFD — Dr. BEG + Dr. CGD.

§. 102.

Anmerkung. Da diese Parallelogramme verschiedene Gestalten haben und dennoch einerlei Flächen, so sind sie in der Größe übereinstimmende, d. h. gleiche, aber nicht congruente Figuren.

§. 103.

Zusatz. Nach dieser Aufgabe ist es leicht, ein Parallelogramm zu construiren, welches mit einem gegebenen gleiche Höhe, Grundlinie und Fläche hat, aber dessen zwei Seitenlinien einen angegebenen Winkel bilden. Wenn ABDC (Fig. 66.) das gege-

bene Parallelogramm und W. GCD der gegebene Winkel ist, so wird CDFB das zu construirende Parallelogramm. Auch kann jede Rhomboide hierdurch in ein ihr gleiches Rechteck verwandelt werden. Man erkennt dieses sogleich daraus, wenn (Fig. 53.) in der Rhomboide MLHG von M ein Loth auf GH und von L ein Loth auf die über H verlängerte GH gezogen wird.

§. 104.

Zusatz. I. Wenn zwei Parallelogramme gleiche Flächen und einerlei Grundlinien haben, so müssen auch ihre Höhen gleich seyn.

II. Haben sie aber bei gleichem Inhalte gleiche Höhe, so müssen auch ihre Grundlinien gleich seyn.

Beides kann, nachdem die Parallelogramme gehörig in einander gelegt worden sind, leicht indirect bewiesen werden.

§. 105.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke, welche einerlei Grundlinien und Höhen haben, sind gleich am Flächeninhalte.

Es seien (Fig. 67.) ABC und DCB die gegebenen Dreiecke, welche die Grundlinie BC und, weil ihre Spitzen A und D in einer mit BC gleichlaufenden Linie ADG liegen, auch die Höhe gemein haben, so sind beide übereinstimmend in der Größe.

Beweis. Denn wenn CE mit BA und CG mit BD gleichlaufend gezogen wird, so ist BCEA =

BCFD (§. 101.) folglich auch Dr. ABC = Dr. DBC (§. 87.)

§. 106.

Zusatz. I. Wenn zwei gleiche Dreiecke auf der nämlichen Grundlinie stehen, so müssen sie auch gleiche Höhe haben, d. h. die gerade Linie, welche ihre Spitze verbindet, muß gleichlaufend mit der Grundlinie seyn.

II. Haben aber gleiche Dreiecke einerlei Höhe, so müssen sie auch gleiche Grundlinien haben.

Der indirecte Beweis ist leicht zu führen, gleich jenem in §. 104.

§. 107.

Zusatz. Auch ergibt sich hieraus, daß jedes Dreieck in ein ihm gleiches verwandelt werden kann, welches mit ihm gleiche Grundlnie und Höhe, aber einen bestimmt gegebenen Winkel an der Grundlinie hat, wie in §. 103.

§. 108.

Zusatz. Ein Dreieck, welches mit einem Parallelogramm einerlei Grundlinie und Höhe hat, ist die Hälfte von ihm; umgekehrt ist jedes Parallelogramm noch einmal so groß, als ein Dreieck von der nämlichen Grundlinie und Höhe.

§. 109.

Zusatz. Daher ist es leicht, ein gegebenes Parallelogramm in ein ihm gleiches Dreieck von der

nämlichen Höhe, oder ein gegebenes Dreieck in ein gleichgroßes Parallelogramm von einerlei Höhe zu verwandeln.

§. 110.

Zusatz. Desgleichen kann jedes gegebene Dreieck und Parallelogramm leicht in 2, 4, 8, 16 u. s. f. gleiche Theile getheilt werden. Im Dreiecke theilt man eine Seite in 2, 4, 8 . . . gleiche Theile (§. 36, *a.*) und zieht von den Theilungspuncten gerade Linien nach der gegenüberstehenden Spitze; im Parallelogramm werden zwei Parallelseiten auf gleiche Weise getheilt und die Verbindungslinien gezogen.

§. 111.

Aufgabe. Ein jedes Dreieck in ein ihm gleiches Parallelogramm zu verwandeln, wovon eine Seite und ein Winkel gegeben ist.

Man soll (Fig. 68.) das Dreieck ABC in ein ihm gleiches Parallelogramm verwandeln, dessen Seite = QR, und dessen Winkel = W. PQR ist.

Auflösung. Beruht darauf, durch BH = HC, W. CDH = W. Q und CG = QR ein Parallelogramm DFNL zu construiren, worin das kleinere DECH dem andern CGNM (§. 89.) und jedes dem Dreiecke ABC gleich ist. (§. 108.) Auch muß MN der gegebenen Seite QR und CMN dem gegebenen Winkel PQR gleich seyn.

§. 112.

Zusatz. Hieraus folgt die Methode, jede vielseitige geradlinige Figur in ein Parallelogramm zu verwandeln, wovon eine Seite und ein Winkel gegeben ist.

Gesetzt, es wäre (Fig. 69.) ABCDEF diese Figur, so kann sie durch Diagonalen AE, BE, CE, in Dreiecke getheilt werden, welche man (nach §. 111.) einzeln in Parallelogramme verwandeln kann, deren Summe das verlangte Parallelogramm bilden.

§. 113.

Zusatz. Auch kann die gegebene mehrseitige Figur zuerst in ein Dreieck, und sodann dieses Dreieck in das verlangte Parallelogramm verwandelt werden.

Um z. B. das Fünfeck (Fig. 70.) ABCDE in ein Dreieck zu verwandeln, ziehe man AG mit BE, so wie auch CF mit BD gleichlaufend, verlängere die DE in G, die ED in F, und ziehe die BG und BF, so ist, wie man leicht einsieht, BGF das verlangte Dreieck. Denn die Dreiecke BEG und BEA; ferner BDF und BDC sind gleich am Inhalte (§. 105.). Auf ähnliche Weise läßt sich jedes andere geradlinige Vieleck durch bloße Construction in ein ihm gleiches Dreieck verwandeln.

§. 114.

Zusatz. Weil das Rechteck nur eine Gattung der Parallelogramme ist, so kann man nunmehr

auch (durch §. 111. und §. 113.) jedes gerad- linige Vieleck in ein Rechteck verwandeln, wovon eine Seite gegeben ist.

§. 115.

Lehrsatz. In jedem rechtwinkeligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse so groß, als die Quadrate der beiden Catheten zusammengenommen.

Es sei ABC (Fig. 71.) das rechtwinkelige Dreieck, ADFC das Quadrat der Hypotenuse, AMNB und BCGL seien die Quadrate der Catheten, so ist ADFC = AMNB + BCGL.

Beweis. Wenn aus B das Loth BE auf DF gefällt wird, so ist das Rechteck ADEH dem Quadrate AMNB gleich. Denn das Dreieck ADB ≅ Dreieck MAC (§. 22.) ist die Hälfte jenes Rechtecks und dieses Quadrats. (§. 108.) Auf ähnliche Art ist das Rechteck CFEH dem Quadrate BCGL gleich, da Dr. FCB ≅ Dr. ACG (§. 22.) wiederum die Hälfte jenes Rechtecks und dieses Quadrates ist. (§. 108).

§. 116.

Anmerkung. I. Dieser Satz, welcher von seinem Erfinder Pythagoras, der pythagorische Lehrsatz genennt wird, ist einer der wichtigsten in der ganzen Mathematik. Er läßt sich noch auf vielfache Art beweisen. Da die Auffindung dieser Beweise eine sehr wirksame Verstandesübung ist, so fügen wir die Figuren 72, 73 und 74 bei, und überlassen es dem Scharfsinne der An-

fänger, aus den construirten Hülfslinien die Beweise aufzufinden. ABC ist immer das gegebene rechtwinkelige Dreieck.

II. Noch wird folgender, äusserst einfacher Beweis hier bemerkt. Nach der (in Fig. 172.) leicht zu erkennenden Construction ist das Sechseck NACGHM dem Sechsecke BADOFC congruent. Zieht man von jenem die Dr. ABC und MBH, von diesem die Dreiecke ABC und DOF ab, so ist der Satz bewiesen.

III. Mehreres von diesem Satze sehe man in meiner Abhandlung: Der Pythagorische Lehrsatz, mit 32 theils bekannten, theils neuen Beweisen versehen. Zweite Auflage. Mainz, 1821.

§. 117.

Zusatz. Wenn in einem Dreiecke die Quadrate zweier Seiten zusammengenommen so groß sind, als das Quadrat der dritten Seite, so ist der, dieser dritten Seite entgegenstehende Winkel ein rechter.

Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 75.) AC^q (d. h. das Quadrat über AC) $= AB^q + BC^q$, so ist W. ABC = R.

Denn wenn man BD = BC auf AB senkrecht errichtet und AD ziehet, so ergibt sich (§. 115.) leicht, daß AC = AD, folglich das Dreieck ABC dem Dreiecke ABD congruent sei (§. 31).

Auch kann dieser Beweis indirect geführt werden.

§. 118.

Zusatz. Soll man daher zwei gegebene Quadrate in ein einziges verwandeln, so setze man ihre

Seiten rechtwinkelig zusammen und ziehe die Hypotenuse, so ist ihr Quadrat das verlangte.

§. 119.

Zusatz. Auch kann sehr leicht ein Quadrat gefunden werden, welches 2, 3, 4, 5, 6mal u. s. w. so groß, als ein gegebenes ist.

§. 120.

Zusatz. Desgleichen kann jede gegebene Menge von Quadraten leicht in ein einziges verwandelt werden.

§. 121.

Zusatz. Wenn man vom Quadrate der Hypotenuse das Quadrat der einen Cathete hinwegnimmt, so bleibt das Quadrat der andern Cathete übrig. Darauf gründet sich die Methode, ein Quadrat zu construiren, welches dem Unterschiede zweier gegebenen Quadrate gleich ist. Man construire nämlich einen rechten Winkel, trage die Seite des kleinern Quadrats vom Scheitel auf dessen einen Schenkel und beschreibe nun aus diesem Puncte mit der Größe der andern Quadratseite einen Bogen, welcher den zweiten Schenkel schneidet, so ist die Größe der andern Cathete hierdurch gefunden.

§. 122.

Zusatz. I. Auf gleiche Weise kann man leicht ein Quadrat finden, welches der Hälfte eines gege-

benen gleich ist. Auch läßt sich $^1/_4$, $^1/_8$, $^3/_4$, $^3/_8$, $^5/_8$, $^7/_8$ u. s. w. eines gegebenen Quadrates wieder durch ein Quadrat darstellen.

II. Wie man aber andere Theile eines Quadrates, z. B. $^4/_7$, $^2/_3$, $^5/_9$ u. s. f. wieder als Quadrate construiren kann, läßt sich erst weiter unten überzeugend einsehen.

IX. Die Sehnen und Tangenten des Kreises.

§. 123.

Lehrsatz. I. Ein Loth aus dem Mittelpuncte des Kreises auf eine willkührliche Sehne in ihm, hallirt diese Sehne.

II. Eine gerade Linie, welche aus dem Mittelpuncte nach der Sehne gezogen wird, steht lothrecht auf ihr.

III. Ein aus der Mite der Sehne errichtetes Loth geht, in seiner Verlängerung, durch des Kreises Mittelpunct.

Es sei (Fig. 76.) AEBD der gegebene Kreis und AB die Sehne, so ist

I. Für W. CFB = W. CFA = R, die BF = AF.

II. Für BF = AF (wenn CF gezogen wird) W. CFB = W. CFA = R.

III. Für BF = AF u. W. BFC = W. AFC = R, liegt des Kreises Mittelpunct in der verlängerten FC.

Beweis. In I. ist, nachdem CB und CA gezogen sind, Dr. CFB ≅ Dr. CFA (§. 60. und §. 31).

In II. ist Dr. CFB ≅ Dr. CFA (§. 31).

Die Wahrheit von III. folgt aus (§. 52. III.)

§. 124.

Zusatz. Hierdurch ist es leicht, in einem gegebenen Kreise den Mittelpunct zu finden, und zwar auf doppelte Weise.

Dies erläutert (Fig. 77.) Hier liegt der Mittelpunct sowohl im Durchschnittspuncte der aus der Mitte von RE und AB auf diese Sehnen errichteten Lothe FN und GM, als auch in der Mitte des durch das gehörig verlängerte eine Loth GC entstehenden Durchmessers LH.

§. 125.

Lehrsatz. Wenn man in jedem Schenkel eines gegebenen Winkels einen beliebigen Punct annimmt und aus diesen Puncten, nach des Winkels Oeffnung hin, zwei Lothe auf die Schenkel errichtet, so müssen sich diese, in ihrer Verlängerung, einmal durchschneiden.

Es sei ACB (Fig. 78.) der gegebene Winkel, E und D die willkührlichen Puncte, EF, DG die beiden Lothe auf AC und BC, so müssen sich diese in L schneiden.

Beweis. Wenn eine gerade Linie von E nach D als Hülfslinie gezogen wird, so sind die zwei innern Winkel kleiner, als zwei Rechte. (§. 70).

§. 126.

Aufgabe. Durch drei gegebene Puncte, welche nicht in gerader Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

Es seien (Fig. 79.) A, B und C diese Puncte. Man soll eine Kreislinie finden, welche durch sie alle geht.

Auflösung und Beweis ergeben sich leicht aus Betrachtung der Hülfslinien. Denn die aus E und D aus der Mitte von BA und BC auf BA und BC errichteten Lothe EH und DG schneiden sich in F (§. 125.) und nun ist Dr. BEF $\cong$ Dr. AEF; auch Dr. BDF $\cong$ Dr. CDF (§. 22.); folglich AF = BF = CF der zufindende Radius des Kreises.

§. 127.

Zusatz. I. Da die drei Puncte jedes Dreiecks nicht in gerader Linie liegen, so kann man jedes Dreieck in einen Kreis einschließen, der durch dessen drei Winkelpuncte geht.

II. Wenn man aus der Mitte der drei Seiten eines Dreiecks drei Lothe auf diese Seiten errichtet und sie gehörig verlängert, so müssen sie sich alle drei in einem Puncte durchschneiden. Denn wenn man irgend zwei Seiten des Dreiecks halbirt, und die sich schneidenden Lothe (§. 125.) zieht, so ent-

steht der Mittelpunct des umschriebenen Kreises, worin die dritte Dreiecksseite eine Sehne ist, aus deren Mitte das errichtete Loth durch dessen Mittelpunct geht (§. 123, III.)

§. 128.

Zusatz. Drei Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, bestimmen nur einen einzigen Kreis.

§. 129.

Zusatz. Zwei Kreise können einander nur in zwei Puncten durchschneiden.

§. 130.

Lehrsatz. Wenn man die Hipotenuse eines rechtwinkeligen Dreieks halbirt, so ist ihre Hälfte der Halbmesser eines Kreises, welcher, aus dem Theilungspuncte beschrieben, durch des Dreieks drei Winkelpuncte geht.

Es sey ABC (Fig. 80.) das gegebene rechtwinkelige Dreiecke und E der Mittelpunct der Hypotenuse, so ist EA = EB = EC.

Beweis. Wenn AB halbirt, das auf sie errichtete Loth DE und die gerade EB gezogen wird, so ergibt sich die Wahrheit des Satzes sogleich daraus, daß wegen Dr. BDE ≌ Dr. ADE (§. 22.) AE = EB und wegen W. EBC = W. BED (§. 76.) und wegen W. DEA = W. C (§. 76.) auch W. EBC = W. C und folglich EB = EC (§. 28.) ist.

§. 131.

Zusatz. Man kann also über die Hypotenuse jedes rechtwinkeligen Dreiecks einen Halbkreis beschreiben, in welchem der Scheitel des rechten Winkels liegt, und die Endpuncte seiner Catheten stehen beiderseits auf dem Ende des Durchmessers jenes Kreises, der um das Dreieck beschrieben werden kann.

§. 132.

Lehrsatz. Wenn man von den zwei Endpuncten des Durchmessers eines Kreises nach einem willkührlichen Puncte seines Umfangs zwei gerade Linien zieht, so ist der daselbst entstehende Peripheriewinkel ein rechter.

Es sei AB (Fig. 81.) der Durchmesser eines Kreises, D ein willkührlicher Punct des Umfangs, so ist W. ADB = R.

Beweis. Wenn DCE gezogen wird, so ist W. ADC = $\frac{1}{2}$ W. ACE und W. BDC = $\frac{1}{2}$ W. BCE (§. 91, a.) folglich W. ADB = $\frac{1}{2}$ W. ACE + $\frac{1}{2}$ W. BCE = R (§. 41.)

§. 133.

Zusatz. I. Ein Peripheriewinkel, der mit seinen Schenkeln auf einem kleinern Bogen, als der Halbkreis steht, ist ein spitzer Winkel.

II. Ein Peripheriewinkel, welcher zwischen seinen Schenkeln einen größern Bogen, als der Halbkreis, befaßt, ist ein stumpfer Winkel.

Beides ergibt sich leicht aus (Fig. 82.) worin W. DEB < R und W. FEB > R seyn muß, da W. AEB = R ist. (§. 132.)

§. 133. *a*.

Zusatz. Vermittelst der Sätze in §. 132 u. in §. 115 läßt sich jedes gegebene Rechteck in ein ihm gleiches Quadrat verwandeln. Es sei EFCH (Fig. 71.) das Rechteck, so verlängere man CH bis CA = CF, beschreibe über AC, gegen B hin, einen Halbkreis, verlängere EH bis zu seinem Durchschnitte in B und ziehe CB, so ist Quadrat BCGL = Rechteck EFCH. (§. 115.)

§. 133. *b*.

Zusatz. Durch Hülfe dieser Auflösung (vor. §.) und einer frühern (§. 114.) kann jede geradlinige Figur durch geometrische Construction in ein ihr gleiches Quadrat verwandelt werden.

§. 133. *c*.

Erklärung. Dieser Verwandlung einer gegebenen geradlinigen Figur in ein ihr gleiches Quadrat, nennt man die Quadratur geradliniger Figuren.

§. 134.

Lehrsatz. I. Sehnen, welche in gleichen Kreisen gleiche Entfernung vom Mitelpuncte haben, sind gleich;

II. Gleiche Sehnen sind in gleichen Kreisen gleichweit vom Mittelpuncte entfernt;

III. Eine Sehne, welche in denselben entfernter vom Mittelpuncte ist, ist die kleinere;

IV. Eine kleinere Sehne ist in ihnen vom Mittelpunct entfernter.

Wenn (Fig. 83.) AB, DE, FG die gegebenen Sehnen und die Lothe CL, CM, CN ihre Entfernungen vom Mittelpuncte sind, so ist

I. Für $CL = CM$, die $AB = DE$.

II. Für $AB = DE$ wird $CL = CM$.

III. $CN > CM$ gibt $GF < DE$ und

IV. Für $GF < DE$ wird $CN > CM$.

Für $CL = CM$ wird, da $CA = CD$, auch $AL^q = CA^q - CL^q$ und $DM^q = CD^q - CM^q$ (§. 121.) folglich $AL^q = DM^q$ und $AL = DM$, da gleiche Quadrate auch gleiche Seiten haben.

Auf ähnliche Art werden die drei übrigen Sätze erwiesen.

Auch läßt sich der Beweis durch die Congruenz der Dreiecke CAL und CDM führen.

§. 135.

Zusatz. I. Eine Sehne, welche dem Mittelpuncte immer näher rückt, wird größer, und wenn sie durch den Mittelpunct geht, ist sie die größte Sehne, d. h. ein Durchmesser.

II. Entfernt sich die Sehne mehr von dem Mittelpuncte, so wird sie kleiner und muß, in der Entfernung des Halbmessers, verschwinden.

§. 135. *a.*

Lehrsatz. I. Wenn aus dem Endpuncte einer im Kreise gezognen Sehne eine zweite Sehne so construirt wird, daß jene zwischen dieser und dem Mittelpuncte liegt, so ist diese zweite Sehne kleiner, als die erste;

II. Wird aber die zweite Sehne so gezogen, daß sie zwischen der ersten und dem Mittelpuncte liegt, so ist diese zweite Sehne größer, als die erste.

Es sei (Fig. 173, *a.*) AB die gegebene und AD die gezogene Sehne, so ist AD $<$ AB; ist aber (Fig. 173, *b.*) AB die gegebene und AD die gezogene Sehne, so ist AD $>$ AB.

Beweis. I. Man ziehe die Halbmesser CB und CD nebst der Sehne BD, so ist W. CBD $=$ W. CDB (§. 24). Allein W. ABD $<$ W. CBD und W. ADB $>$ W. CDB; folglich W. ABD $<$ W. ADB und AD $<$ AB (§. 56, II.)

II. Ganz auf ähnliche Art wird hier bewiesen, daß, wegen W. ABD $>$ W. ADB, auch AD $>$ AB ist.

§. 135. *b.*

Zusatz. Auch ist es leicht, die umgekehrte Behauptung dieses Lehrsatzes zu beweisen.

§. 136.

Lehrsatz. In jedem Kreise gehören:

I. Zu gleichen Sehnen gleiche Bogen;

II. Zu gleichen Bogen gleiche Sehnen;

III. Zur kleinern Sehne der kleinere Bogen;

IV. Zum kleinern Bogen die kleinere Sehne;

V. Zur größern Sehne der größere Bogen;

VI. Zum größern Bogen die größere Sehne.

Es sei, (in Fig. 83.)

I. Sehne AB = Sehne DE, so ist Bogen AVB = Bogen DWE;

II. Wenn Bogen AVB = Bog. DWE, so ist S. AB = S. DE.

III. S. FG < S. DE, so ist Bog. FSG < Bog. DWE;

IV. Bog. FSG < Bog. DWE, so ist S. FG < S. DE;

V. S. DE > S. FG, so ist Bog. DWE > Bog. FSG;

VI. Bog. DWE > Bog. FSG, so ist S. DE > S. FG.

Beweis. Zu I. Hier ist Dr. ACB $\cong$ Dr. DCE (§. 31.) folglich W. ACB = W. DCE und daher auch Bog. AVB = Bog. DWE. (§. 97. II.)

Zu II. Hier ist W. ACB = W. DCE (§. 97, II.) folglich Dr. ACB ≅ Dr. DCE (§. 22.) und AB = DE.

Zu III. bis VI. Der Beweis folgt nun leicht aus §. 135, *a.* und *b.*

§. 137.

Lehrsatz. I. Eine gerade Linie, welche auf dem Halbmesser eines Kreises an seinem Endpuncte lothrecht steht, hat nur diesen einen Punct mit dem Umfange des Kreises gemein.

II. Eine gerade Linie, welche am Ende des Halbmessers mit ihm einen (auch noch so großen) spitzen Winkel bildet, fällt in den Kreis und wird, gehörig verlängert, eine Sehne.

I. Wenn (Fig. 84.) die AD in B auf CB senkrecht ist, so liegen alle Puncte derselben, den Punct B ausgenommen, ausserhalb der Peripherie.

II. Wenn aber W. CBH < R ist, so wird die verlängerte BH zur Sehne BG.

Beweis. I. Ergibt sich daraus, daß jede andere Linie von C auf AD, z. B. CE größer als BC seyn muß (§. 55).

II. Aber daraus, daß das Loth CH in den Kreis fallen muß, weil W. CBH < R ist.

§. 138.

Anmerkung. Hierdurch ist der (aus der Anschauungslehre bekannte) Begriff der Tangente oder der Berührungslinie geometrisch begründet.

§. 139.

Aufgabe. An jeden gegebenen Punct in dem Umfange eines Kreises eine Tangente zu construiren.

Der Kreis BFLGB und der Punct B (Fig. 84.) sei gegeben. Man soll für B die Tangente finden.

Auflösung und Beweis fließen unmittelbar aus vorhergehendem Lehrsatze, da man nur den Radius CB und auf ihn durch B das Loth ABD ziehen darf (§. 137).

§. 140.

Zusatz. I. Durch jeden Punct in der Peripherie eines Kreises kann nur eine Tangente construirt werden. Denn auf den dahin gezogenen Halbmesser gibt es nur ein Loth. (§. 51).

II. Wenn man aus dem Berührungspuncte der Tangente und des Kreises ein Loth auf sie errichtet, so muß dieses, gehörig verlängert, durch den Mittelpunct gehen. (§. 51).

§. 141.

Aufgabe. Von einem ausserhalb eines Kreises gegebenen Puncte eine Tangente an dessen Umfang zu ziehen.

Es sei (Fig. 85.) aus C mit CD einen Kreis beschrieben, und ausser ihm ein Punct A gegeben, woraus die Tangente gefunden werden soll.

Auflösung. Wenn man AC, und FB durch D auf sie lothrecht zieht, mit CA den Kreisbogen MAN beschreibt, welcher die Puncte F und B bestimmt, und sodann FC und BC zieht, so sind AG und AE zwei Tangenten.

Beweis. Da CA = CB, CE = CD und W. ACE = W. BCD, so ist Dr. ACE ≌ Dr. BCD (§. 22.) und daher W. AEC = W. BDC = R. Folglich AE die eine Tangente (§. 137).

Ein ähnlicher Beweis gilt für AG.

§. 142.

Anmerkung. Eine andere Auflösung dieser Aufgabe ergibt sich leicht aus (Fig. 86.). Sie zu finden und ihre Richtigkeit zu erweisen, ist eine lehrreiche Uebung für Anfänger. Zum Hülfssatze dienet vorzüglich §. 132.

§. 143.

Zusatz. I. Die zwei Tangenten, welche von einem Puncte ausserhalb des Kreises an dessen Umfange gezogen werden, fassen immer einen kleineren Bogen, als der Halbkreis ist, zwischen sich. Denn für GDE = 2 R muß GA mit EA gleichlaufend seyn (§. 67).

II. Je näher dieser Punct ausserhalb gegen den Kreis rückt, desto kleiner wird der zwischen den Tangenten liegende Bogen. Für AD (Fig. 85.)

= 0, fällt G und E in D zusammen, und aus zwei Tangenten wird nun eine, nämlich FDB.

III. Entfernt sich aber A immer mehr von D, so wird Bogen GDE immer größer; bleibt aber stets kleiner, als der Halbkreis.

§. 144.

Zusatz. I. Der Winkel, welchen die Tangente mit dem Bogen bildet, ist kleiner als jeder anzugebende spitze Winkel. (§. 137, II.)

II. Der Winkel aber, welcher von dem Bogen und dem Halbmesser gebildet wird, ist größer als jeder anzugebende spitze Winkel. (I).

X. Von den Mittelpuncts- und Peripheriewinkeln.

§. 145.

Lehrsatz. Wenn in einem Kreise ein Mittelpunctswinkel und ein Peripheriewinkel mit ihren Schenkeln auf dem nämlichen Bogen stehen, so ist jener noch einmal so groß, als dieser.

Es sei (Fig. 87.) in dem aus D mit DB beschriebenen Kreise der W. ADC ein Mittelpuncts-, der W. ABC ein Peripheriewinkel, welche beide auf dem nämlichen Bogen AC stehen, so ist W. ADC = 2 W. ABC.

Beweis. Wegen DB = DC ist auch W. B = W. C. Folglich W. ADC = 2 W. B (§. 91. *a.*)

Für die beiden übrigen Lagen (Fig. 88 und 89) hat ein ähnlicher Beweis statt, wenn die Hülfslinie BDE gezogen wird.

§. 146.

Zusatz. Jeder Peripheriewinkel hat folglich die Hälfte des Bogens zwischen seinen Schenkeln zum Maße. (§. 97).

§. 147.

Zusatz. Zwischen parallelen Sehnen *eines* Kreises sind gleiche Bogen enthalten.

Es sei (Fig. 90.) AB und DE gleichlaufend, so ist der Bogen AD dem Bogen BE gleich. Dies ergibt sich leicht, nachdem die Hülfslinie DB gezogen ist, nach §. 76 und §. 146.

§. 148.

Zusatz. Alle Peripheriewinkel, welche auf einerlei Kreisbogen stehen, sind einander gleich.

§. 149.

Zusatz. Ein Winkel, welcher mit seinem Scheitel ausserhalb des Kreises liegt und mit den Endpuncten seiner Schenkel auf einem Bogen dieses Kreises steht, hat den halben Unterschied der beiden zwischen seinen Schenkeln liegenden Kreisbogen zum Maße.

Es sei (Fig. 91.) ABD der gegebene Winkel, so hat er die Hälfte des Unterschiedes der Bogen AD und EF zum Maße.

Wenn EG mit BD gleichlaufend auch CA und CG gezogen wird, so ist W. B = W. AEG (§. 76.) auch Bog. EF = Bog. DG (§. 147.) da nun $\frac{1}{2}$ Bog. AG = $\frac{1}{2}$ Bog. AD — $\frac{1}{2}$ Bog. GD = $\frac{1}{2}$ Bog. AD — $\frac{1}{2}$ Bog. EF ist, so muß diese Differenz auch das Maß von W. AEG = W. B seyn. (§. 146.)

§. 150.

Zusatz. Wenn der Scheitel eines Winkels innerhalb der Ebene des Kreises liegt, so hat er die halbe Summe der zwei Bogen zu seinem Maße, wovon der eine zwischen seinen gegebenen Schenkeln; der andere aber zwischen seinen rückwärts verlängerten Schenkeln liegt.

Es sei ABD (Fig. 92.) der gegebene Winkel, so ist der halbe Bogen AD nebst dem halben Bogen EF sein Maß.

Dieses leuchtet auf ähnliche Art, wie vorhin ein (§. 149.), wenn die EG mit BA gleichlaufend und dann noch CG und CD gezogen wird.

XI. Regelmäßige Vielecke.

§. 151.

Aufgabe. In einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Viereck, d. h. ein Quadrat zu construiren.

Mit dem Halbmesser CD (Fig. 93.) sei der Kreis DBEA beschrieben. Man soll ein Quadrat in denselben construiren.

Auflösung und Beweis. Man stelle zwei Durchmesser AB und DE lothrecht aufeinander und ziehe DB, BE, EA und AD, so ist Dr. DCB $\cong$ Dr. BCE $\cong$ Dr. ECA $\cong$ Dr. ACD (§. 22.) folglich DB = BE = EA = AD. Auch ist W. ADB = W. ADC + W. BDC = R, da W. ADC = W. BDC = $\frac{1}{2}$ R ist (§. 99. VI.)

§. 152.

Aufgabe. Um einen gegebenen Kreis ein Quadrat zu construiren.

Es sei ADBE (Fig. 94.) der gegebene Kreis, um welchen ein Quadrat construirt werden soll.

Auflösung und Beweis. Wenn durch die vier Endpuncte zweier sich lothrecht schneidenden Durchmesser vier Tangenten gezogen werden, so entsteht das verlangte Quadrat. Denn es ist FG mit HJ und GJ mit FH gleichlaufend (§. 76).

§. 153.

Zusatz. Das in einen Kreis beschriebene Quadrat ist die Hälfte des um denselbigen Kreis construirten Quadrats.

Denn wenn man (Fig. 94.) die Sehnen DB, BE, EA und AD zieht, so besteht jenes Qua-

drat aus vier; dieses aber aus acht congruenten Dreiecken, deren jedes = Dr. DCB ist.

§. 154.

Aufgabe. In einen Kreis ein regelmäßiges Achteck zu beschreiben.

In den mit CE (Fig. 95.) beschriebenen Kreis soll ein reguläres Achteck beschrieben werden.

Auflösung und Beweis ergeben sich leicht aus genauer Betrachtung der Figur.

§ 155.

Aufgabe. Um einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Achteck zu construiren.

Um den mit CD (Fig. 96.) beschriebenen Kreis ein regelmäßiges Achteck zu beschreiben.

Auflösung. Die Linie CA und die durch den Punct D gezogene Tangente MDN bahnt den Weg zur Auflösung und zum Beweise.

§. 156.

Zusatz. Hieraus ist nun klar, wie man sowohl in, als um den Kreis ein regelmäßiges 16, 32, 64 Eck u. s. f. construiren kann.

§. 157.

Zusatz. I. Die Fläche jedes einzelnen dieser in den Kreis beschriebenen Vielecke ist kleiner; jedes

um denselben beschriebenen aber größer, als die Ebene des Kreises. Denn es ist z. B. Dr. ECB (Fig. 95.) $<$ Sector ECBFE. Ferner z. B. DGBC (Fig. 94.) $>$ Quadrant DBC.

II. Das, sowohl in als um den Kreis beschriebene regelmäßige Vieleck von noch einmal so viel Seiten kömmt der Kreisfläche näher, als das ihm entsprechende Vieleck von halb so viel Seiten. So ist z. B. (Fig. 95.) Dr. CEF + Dr. CBF $>$ Dr. CEB. Ferner ist z. B. (Fig. 96.) CBMNEC $<$ CBAE.

§. 158.

Zusatz. I. Der Umfang jedes dieser in den Kreis construirten Vielecke ist kleiner, als des Kreises Umfang; der Umfang jedes um denselben beschriebenen Vielecks aber größer, als die Kreisperipherie.

II. Der Umfang des sowohl in als um den Kreis beschriebenen Vielecks von noch einmal so viel Seiten, kömmt dem Umfange des Kreises näher, als der Umfang des ihm entsprechenden Vielecks von halbsoviel Seiten. Diese zwei Sätze werden auf ähnliche Art, wie die vorigen erläutert (§. 157.)

§. 159.

Aufgabe. In einen gegebenen Kreis ein reguläres Dreieck zu beschreiben.

Das regelmäßige Dreieck soll in den mit CA (Fig. 97.) beschriebenen Kreis construirt werden.

Auflösung. Man errichte auf AC das Loth CB > CA, beschreibe über CB das gleichseitige Dreieck CBE, halbire W. BCE durch CD; ziehe AG, so ist diese die Seite des verlangten Dreiecks.

Beweis. Denn nach der Construction ist der Winkel ACG = 90° + 30° = 120°, folglich Bogen AFG = 240° und Bogen AF = Bogen FG auch = 120°. (§. 136. I.)

§. 160.

Aufgabe. Um einen Kreis ein regelmaßiges Dreieck zu beschreiben.

Der gegebene Kreis sei AFBA (Fig. 98.) und C dessen Mittelpunct.

Auflösung. Man ziehe von C durch die drei Seiten des in den Kreis beschriebenen regulären Dreiecks HKJ die Lothe CA, CB und CF, und durch A, B und F, die sich in D, E und G schneidenden Tangenten, GD, DE und EG.

Beweis. Ergibt sich durch die Hülfslinien CD, CE und CG.

§. 161.

Anmerkung. Die Construction des regelmäßigen Dreiecks ist hier nach der Construction des regulären Vierecks gelehrt worden, weil diese etwas einfacher ist, als jene.

§. 162.

Aufgabe. In den Kreis ein regelmäßiges Sechseck zu beschreiben.

Der gegebene Kreis sei ABDA (Fig. 99.)

Auflösung. Man halbire die Seite des regulären Dreiecks AD in I, ziehe CI, verlängere sie in E, und ziehe AE, DE, so sind diese zwei Seiten des Sechsecks.

Beweis. Man sieht leicht, daß AE = ED wird, weil AI = DI, W. AIE = W. DIE = R (§. 123, II.) und IE = IE, folglich Dr. AIE ≌ Dr. DIE ist (§. 22.)

§. 163.

Zusatz. Die Seite des regelmäßigen Sechsecks in dem Kreise ist seinem Halbmesser gleich. Denn W. ACD $= \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$; folglich W. ACE = 60° und auch (nach §. 99, III.) W. CAE = W. CEA = 60°. Daher CA = AE (§. 28.)

§. 164.

Zusatz. I. Dieses gibt eine sehr bequeme Methode, in einen Kreis ein regelmäßiges Sechseck zu beschreiben.

II. Auch erleichtert es die Construction des in den Kreis zu beschreibenden regulären Dreiecks.

§. 165.

Aufgabe. Um den Kreis ein regelmäßiges Sechseck zu beschreiben.

Es sei (Fig. 100.) mit dem Halbmesser CA ein Kreis beschrieben, um welchen das verlangte Sechseck construirt werden soll.

Auflösung. Wenn man aus C auf die Seiten DB, BL, LM des regelmäßigen Sechsecks in dem Kreise die Lothe CE, CP, CN zieht, sie nach A, F, H verlängert, und durch diese Puncte Tangenten construirt, so ist DFG die eine Seite des zu findenden Sechsecks.

Beweis. Ergibt sich leicht aus den Hülfslinien CR und CG. Denn weil CF = CF, W. CFR = W. CFG = R und W. FCR = W. FCG = 30°, so ist Dr. FCR ≅ Dr. FCG (§. 26.) folglich FR = FG. Eben so wird bewiesen, daß RA = RF und GH = GF ist u. s. w.

§. 166.

Anmerkung. Aus den bisherigen Auflösungen ist klar, daß die in den Kreis und um den Kreis beschriebenen regelmäßigen Vielecke entweder gegenüberliegende gleichlaufende Seiten haben, oder nicht. Bei allen diesen Vielecken, deren Seitenzahl eine gerade ist, hat ein solcher Parallelismus Statt; bei den übrigen aber nicht.

§. 167.

Zusatz. I. Wenn die Seite eines regelmäßigen Vielecks im Kreise gegeben ist und man zieht von dessen Mittelpunct ein Loth auf dieselbe, verlängert es bis zur Peripherie und zieht die zwei Sehnen des halbirten Bogens, so ist jede die Seite des in den Kreis zu construirenden regulären Doppelecks.

II. Daher ist hieraus klar, daß sich sowohl in, als um den Kreis reguläre Vielecke von 6, 12, 24, 48, 96 als auch von 8, 16, 32, 64, 128 Ecken u. s. w. beschreiben lassen, welche sowohl am Inhalte der Kreisfläche, als auch am Umfange seiner Peripherie immer näher kommen, je mehr Seiten sie haben.

§. 168.

Zusatz. Auch nähert man sich durch jedes folgende regelmäßige Doppeleck der Kreisebene mehr als um die Hälfte des Unterschiedes, der zwischen dem nächstvorhergehenden regulären Vielecke und dem Kreise Statt gefunden hat.

Es sei AD (Fig. 99.) die Seite des regulären Dreiecks, AE = DE jene des regelmäßigen Sechsecks in dem Kreise mit CA. Errichtet man in A und D die Lothe AM und DN, bis sie von einer Tangente durch E in M und N geschnitten werden, so ist Dreieck EID $= \frac{1}{2}$ Rechteck EIDN; aber die Fläche EIDhE > Dreieck EID; folglich auch Dreieck AED > $\frac{1}{2}$ Abschnitt AfEhD, woraus die Wahrheit des Satzes hervorgeht.

§. 169.

Anmerkung. Ausser diesen beiden Reihen von regulären Vielecken (§. 167.) deren geometrische Construction hierdurch nachgewiesen ist, gibt es noch andere Vielecke, welche zum Theil nicht rein geometrisch construirt werden können. Dahin gehört das regelmäßige Siebeneck, Neuneck, Eilfeck u. s. w. Doch hat man eine theoretisch-

practische Methode, diese Vielecke zu verzeichnen, welche sich auf die Berechnung der Mittelpuncts- und Vieleckswinkel (deren Begriff aus der Anschauungslehre bekannt ist) gründet, wovon nun das Wichtigste angeführt werden soll.

§. 170.

Aufgabe. Die Größe des Mittelpunctswinkels in jedem regulären Vielecke nach Graden zu finden.

Auflösung. Man dividire 360° durch die Zahl der Vielecksseiten. Der Quotient ist der Centriwinkel.

Die Richtigkeit leuchtet von selbst ein.

§. 171.

Zusatz. Daher ist der Centriwinkel im regelmäßigen Dreiecke = 120°, im Vierecke = 90°, im Fünfecke = 72°, im Sechsecke = 60°, im Siebenecke = $51° \frac{3}{7}$, im Achtecke = 45°, im Neunecke = 40°, im Zehnecke = 36°, im Eilfecke = $32° \frac{8}{11}$, im Zwölfecke = 30° u. s. w.

§. 172.

Zusatz. Wenn man an den Mittelpunct eines gegebenen Kreises vermittelst des **Transporteurs** (eines Werkzeugs, dessen Vorrichtung und Gebrauch der Lehrer hier erklären muß) den, einem darin zu beschreibenden regulären Vielecke, zukommenden Centriwinkel legt, so ist es leicht, in jeden gegebenen Kreis irgend ein reguläres Vieleck zu con-

struiren. Diese practische Uebungen sind den Anfängern zu empfehlen.

§. 173.

Aufgabe. Die Größe des Vieleckswinkels in jedem regulären Vielecke nach Graden zu bestimmen.

Auflösung. Wenn man den Centriwinkel dieses Vielecks von 180° abzieht, so bleibt der Polygonwinkel übrig.

Der Grund davon ist leicht zu finden.

§. 174.

Zusatz. Hierdurch findet man den Polygonwinkel im regulären Dreiecke = 60°, im Vierecke = 90°, im Fünfecke = 108°, im Sechsecke = 120°, im Siebenecke = 128° $\frac{4}{7}$, im Achtecke = 135°, im Neunecke = 140°, im Zehnecke = 144°, im Eilfecke = 147° $\frac{3}{11}$, im Zwölfecke = 150° u. s. w.

§. 175.

Zusatz. Wenn man an beide Endpuncte einer als Vielecksseite gegebenen geraden Linie, durch Hülfe des Tranporteurs, den halben Polygonwinkel eines zu construirenden regulären Vielecks trägt, die beiden Schenkel bis zum Durchschneiden verlängert, aus diesem Durchschnittspuncte mit einem dieser Schenkel einen Kreis beschreibt, so kann jene Linie, als Seite des zu findenden Viel-

ecks, in diesem Kreise herumgetragen werden. — Auch diese Auflösung soll practisch geübt werden.

§. 176.

Zusatz. Aus dem Bisherigen ergibt sich nun leicht die Wahrheit folgender Sätze:

I. Jedes reguläre Vieleck hat einen Mittelpunct, d. h. einen Punct, der von allen seinen Winkelpuncten gleichweit absteht.

II. Dieser Mittelpunct wird gefunden, wenn man zwei nebeneinanderliegende Polygonwinkel halbirt und die Theilungslinien bis zum Durchschnitte verlängert.

III. Aus diesem Mittelpuncte kann man mit einer geraden, bis zum Scheitelpuncte eines Polygonwinkels gezogenen Linie einen Kreis beschreiben, der durch alle übrige Scheitelpuncte der Vieleckswinkel geht, und folglich das Vieleck umschließt.

IV. Auch kann mit einem Lothe aus dem Mittelpuncte auf eine Vielecksseite ein Kreis beschrieben werden, der alle andere Vielecksseiten inwendig berührt, und von dem Vielecke eingeschlossen wird.

V. Durch gerade Linien, welche aus dem Mittelpuncte des Vielecks nach allen Scheitelpuncten der Polygonwinkel gezogen werden, wird das Vieleck in so viele congruente Dreiecke getheilt, als es Seiten hat.

VI. Daher ist auch jedes reguläre Vieleck an Fläche einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie

der Summe aller Vielecksseiten und dessen Höhe einem Lothe gleich ist, welches vom Mittelpuncte des Vielecks auf eine Vielecksseite gezogen wird. Dieses folgt leicht aus §. 105.

XII. Aehnlichkeit der Dreiecke.

§. 177.

Erklärung. Eine Größe, welche mehrmal zu sich selbst gesetzt, einer andern, ihr gleichartigen, gleich wird, heißt das Maß derselben. Bestimmen, wie oft eine kleinere Größe in der größern enthalten ist, heißt Messen. Wenn eine Größe in mehreren andern dergestalt enthalten ist, daß kein Rest bleibt, wenn man alle größere durch die kleinere mißt, so wird sie ihr gemeinschaftliches Maß genennt.

Es ist zweckmäßig, diese Begriffe durch gerade Linien anschaulich zu machen. Daher dieses dem Lehrer empfohlen wird.

§. 178.

Lehrsatz. Wenn zwei gerade Linien von willkührlicher Größe gegeben sind, so läßt sich eine dritte gerade Linie denken, welche entweder ganz genau, oder ohne bemerkbaren Fehler das gemeinschaftliche Maß von beiden ist.

Beweis. Entweder ist die kleinere der beiden Linien selbst das genaue Maß der größern, oder

nicht. Im ersten Falle ist die Behauptung für sich klar. Im zweiten Falle halbire man die kleinere Linie, so ist vielleicht diese Hälfte das Maß der größern; wo nicht, so halbire man die Hälfte, so ist vielleicht der vierte Theil dieses Maß. Denkt man sich so die kleinere Linie in 8, 16, 32, 64 u. s. f. gleiche Theile getheilt, so wird eines dieser Theilchen einmal als das Maß der größern Linie ohne bedeutenden Fehler anzusehen seyn. Denn der Rest bei dem Messen muß immer kleiner, als das Maß seyn. Das Maß selbst kann aber hier, durch fortgesetztes Halbiren, ins Unendliche verkleinert werden. Folglich auch jener Rest.

Auch diesen Satz erläutere der Lehrer durch Linien.

§. 179.

Anmerkung. I. Da die folgenden Sätze nicht ohne einige Kenntniß von den geometrischen Verhältnissen und Proportionen verstanden werden können, so muß für solche Leser, welche noch keine Kenntniß davon haben, hier das Wichtigste davon vorgetragen werden.

II. Für Anfänger, welchen die Lehre von den Proportionen noch gänzlich unbekannt ist, muß der Lehrer Alles durch Zahlenbeispiele erläutern. Andern dienen diese wenige §§. zur nützlichen Wiederholung.

§. 180.

Erklärung. I. Die Vergleichung zweier gleichartigen Größen, wodurch man bestimmt, wie vielmal die eine größer, als die andere ist, heißt das geometrische Verhältniß dieser Größen.

Das Zeichen desselben ist dieses: und a : b heißt so viel als: *a* verhält sich zu *b*; oder 3 : 15 so viel als: 3 verhält sich zu 15.

II. Die Größen, welche das Verhältniß bilden, werden dessen Glieder genennt.

III. Die Zahl, welche bestimmt, wie oft das zweite Glied in dem erstern enthalten ist, heißt der Exponent des Verhältnisses. Dieser Exponent ist daher nichts anders, als der Quotient einer Division.

IV. Verhältnisse, welche gleiche Exponenten haben, sind gleiche Verhältnisse. Im Gegentheile heißen sie ungleiche Verhältnisse, und nun ist eines das größere, das andere das kleinere.

Erläuterungen durch Zahlen und Linien müssen alles dieses dem Anfänger klar machen.

§. 181.

Erklärung. I. Wenn zwei gleiche geometrische Verhältnisse zusammengestellt werden, so entsteht eine geometrische Proportion.

II. Sie besteht aus vier Gliedern, welche der Ordnung nach das erste, zweite, dritte und vierte heißen. Was äussere und innere Glieder sind, erklärt sich von selbst.

III. Diese vier Glieder werden verhältnißmäßige oder proportionale Glieder genennt, und man sagt, daß sich das erste Glied so zum zweiten verhalte, wie sich das dritte Glied zum vierten verhält.

IV. Wenn a, b, c und d diese vier proportionirte Glieder sind, so wird die Proportion, welche sie bilden, folgendergestalt bezeichnet: a : b = c : d. Man sagt: a verhält sich zu b, wie sich c zu d verhält, oder auch rückwärts: d verhält sich zu c, wie sich b zu a verhält.

Erläuterungen in Zahlen und Linien müssen dies vollkommen aufklären.

§. 182.

Zusatz. Wenn zwei Verhältnisse, einzeln genommen, einem dritten gleich sind, so sind sie auch unter sich gleich und bilden eine Proportion.

Erläuterung.

§. 183.

Grundsatz. Da das Verhältniß jedes Paares gleichartiger Größen durch Zahlen bestimmt wird, so können alle Verhältnisse und Proportionen in Zahlen dargestellt werden.

§. 184.

Erklärung. Wenn das erste Glied kleiner als das zweite ist, so heißt es ein Verhältniß vom Kleinen zum Großen; umgekehrt, ein Verhältniß vom Großen zum Kleinen. Sind beide Glieder gleich, so ist es ein Verhältniß der Gleichheit; sind sie ungleich, ein Verhältniß der Ungleichheit.

Erläuterungen.

§. 185.

Zusatz. I. Wenn eine Proportion aus zwei Verhältnissen der Ungleichheit vom Kleinen zum Großen besteht, so ist der Exponent (§. 180, III.) ein eigentlicher Bruch; besteht sie aber aus Verhältnissen vom Großen zum Kleinen, so ist derselbe entweder eine reine ganze Zahl, oder eine gemischte Zahl.

II. In jedem Falle ist das erste Glied ein Product aus dem zweiten Gliede in den Exponenten.

Erläuterungen.

§. 186.

Lehrsatz. In jeder geometrischen Proportion ist das Product aus dem ersten Gliede in das vierte, dem Producte aus dem zweiten Gliede in das dritte gleich.

Beweis. Man kann durch Hülfe des vorigen §. leicht zeigen, daß diese Producte aus gleichen Factoren bestehen, folglich gleich seyn müssen.

Erläuterungen.

§. 187.

Zusatz. In jeder geometrischen Proportion verhält sich auch das erste Glied zum dritten, wie das zweite Glied zum vierten.

Beweis. Denn das zweite und vierte Glied sind entweder die Gleichvielfachen oder die gleichvielten Theile des ersten und dritten.

Erläuterungen.

§. 188.

Zusatz. Wenn man das erste und zweite, oder das erste und dritte, oder das zweite und vierte, oder das dritte und vierte Glied einer geometrischen Proportion mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt, so bilden die vier neuen Glieder wieder eine Proportion.

Beweis und Erläuterungen geben sich leicht.

§. 189.

Zusatz. Wenn die gleichnamigen Glieder mehrerer Proportionen d. h. alle erste, alle zweite, alle dritte und alle vierte Glieder mit einander multiplicirt werden, so bilden diese Producte auch eine Proportion, welche eine zusammengesetzte Proportion genennt wird. Jedes ihrer Verhältnisse heißt ein zusammengesetztes.

Beweis und Erläuterungen.

§. 190.

Zusatz. I. Wenn zwei Producte gleich sind, deren jedes aus zwei Factoren besteht, so kann man aus diesen vier Factoren eine geometrische Proportion bilden, worin die Factoren des einen Products die innern, die Factoren des andern Products die äussern Glieder sind.

Es sind hier acht Proportionen möglich, welche sich aber auf vier verschiedene zurückbringen lassen.

Erläuterungen.

§. 191.

Zusatz. I. Wenn mehrere gleiche geometrische Verhältnisse gegeben sind, so verhält sich die Summe aller ersten Glieder zur Summe aller zweiten Glieder, wie jedes erste Glied zu seinem zweiten.

II. Auch bilden in einer Proportion die Summen oder die Differenzen ähnlich liegender Glieder mit diesen Gliedern selbst wieder eine Proportion. Hieraus entsteht eine große Mannigfaltigkeit von neuen Proportionen.

§. 192.

Aufgabe. Wenn irgend drei Glieder einer geometrischen Proportion gegeben sind, und das vierte fehlt, dieses fehlende zu finden.

Auflösung. I. Ist das fehlende ein äusseres, so wird das Product der innern Glieder durch das vorhandene äussere dividirt;

II. Fehlt aber ein inneres Glied, so dividire man das Product der äussern Glieder durch das vorhandene innere. In beiden Fällen ist der Quotient das gesuchte Glied.

Beweis nebst Erläuterungen ergeben sich leicht (§. 186.)

§. 193.

Lehrsatz. Wenn zwei Dreiecke einerlei Höhe haben, so verhalten sie sich, in Ansehung der Größe ihrer Flächen, wie ihre Grundlinien.

Wenn die Dreiecke ABC (Fig. 101.) und ADC gleiche Höhe haben, so verhält sich Dr. ABC : Dr. ADC = BC : CD.

Beweis. Die Wahrheit beruht darauf, daß man BC und CD mit einerlei Maß ausmessen (§. 178.) folglich die Dreiecke ABC und ADC in so viele gleiche Theile theilen kann, als Maßtheile in BC und CD sind (§. 105.)

Erläuterung. Wäre z. B. BC : CD = 1 : 2, oder = 1 : 3, oder = 1 : 5, so wäre auch Dr. ABC : Dr. ADC = 1 : 2, oder = 1 : 3, oder = 1 : 5 u. s. w.

§. 194.

Lehrsatz. Parallelogramme von gleichen Höhen verhalten sich, in Rücksicht der Größe ihrer Fläche, wie ihre Grundlinien.

Wenn (Fig. 102.) ABDC und EFGD Parallelogramme von gleicher Höhe sind, so verhält sich jenes zu diesem wie CD : DG.

Beweis. Denn wenn man die Querlinien BC und EG zieht, so ist Dr. BCD : Dr. EDG = CD : DG (§. 193.) und das Doppelte verhält sich, wie das Einfache.

§. 194. *a.*

Zusatz. Dreiecke und Parallelogramme von gleichen Grundlinien verhalten sich, in Ansehung ihrer Flächenräume, wie ihre Höhen. — Denn alle schiefwinkelige Dreiecke und Parallelogramme

lassen sich sehr leicht in gleichgroße rechtwinkelige Dreiecke und Rechtecke verwandeln.

Wenn die Dreiecke (Fig. 174.) BAC und GFH gleiche Grundlinien BC = GH, aber verschiedene Höhen AD und FI haben, so mache man CE = BD und HK = GI und ziehe AE und FK. Hier ist Dr. ADE = Dr. ABC und Dr. FIK = Dr. FGH (§. 105.) Da nun die rechtwinkeligen Dreiecke EDA und KIF einerlei Höhe DE = IK haben, so ist Dr. EDA : Dr. KIF = DA : IF (§. 194.) folglich auch Dr. ABC : Dr. FGH = AD : FI.

Von Parallelogrammen gilt ein ähnlicher Beweis.

§. 194. *b.*

Zusatz. Die Flächenräume zweier Dreiecke oder Parallelogramme von verschiedenen Grundlinien und Höhen stehen im zusammengesetzten Verhältnisse (§. 189.) ihrer Grundlinien und Höhen. Es sei eines Dreiecks Grundlinie = G, Höhe = H, Größe der Fläche = F; eines andern Dreiecks Grundlinien = g, Höhe = h, Größe der Fläche = f. Man denke sich ein drittes Dreieck, welches eine Grundlinie = G und eine Höhe = h hat. Setzt man die Größe seiner Fläche = d, so ist

Dr. F : Dr. d = H : h (§. 194, *a.*)
Dr. d : Dr. f = G : g (§. 194.)

Dr. F : Dr. f = H × G : h × g (§. 189. §. 188.)

§. 194. *c*.

Zusatz. Wenn zwei Dreiecke oder Parallelogramme, bei verschiedenen Höhen und Grundlinien, gleiche Fläche haben, so verhält sich die Höhe des ersten zur Grundlinie des zweiten, wie die Höhe des zweiten zur Grundlinie des ersten; und umgekehrt. Wenn (in §. 194, *b*.) Dr. F = Dr. f ist, so muß auch H × G = h × g seyn, und man hat

H : h = g : G, oder auch
G : g = h : H (§. 190. I.)

§. 195.

Lehrsatz. Wenn man in der Seite eines Dreiecks einen willkührlichen Punct nimmt, und durch diesen mit irgend einer Dreiecksseite eine Parallele zieht, so werden die beiden Seiten, wodurch die Parallele geht, in proportionirte Theile getheilt.

Es sei in der Seite AB (Fig. 103.) des Dreiecks ABC der Punct D genommen, und durch ihn DE mit BC gleichlaufend gezogen, so verhält sich AD : DB = AE : EC.

Beweis. Wenn man die Hülfslinien DC und EB zieht, so ist Dr. ADE : Dr. BDE = AD : DB (§. 193.)

Dr. AED : Dr. CED = AE : EC (§. 193.)
Nun ist aber Dr. BDE = Dr. CED (§. 105.) folglich hat man

Dr. ADE : Dr. BDE = Dr. AED : Dr. CED daher auch AD : DB = AE : EC (§. 191, III.)

§. 195. *a*

Zusatz. Aus der Proportion AD : DB = AE : EC folgt auch noch

1) AD : AE = DB : EC (§. 187.)

2) AD + DB : AD = AE + EC : AE (§. 191, II.)

3) AD : AE = AB : AC u. s. w.

§. 196.

Zusatz. Umgekehrt: wenn die Theile zweier Dreiecksseiten proportionirt sind, so ist die durch die Theilungspuncte gehende gerade Linie mit der gegenüberliegenden Dreiecksseite gleichlaufend.

Es sei (Fig. 103.) AD : DB = AE : EG, so ist DE gleichlaufend mit BC. Denn aus dieser Proportion folgt Dr. ADE : Dr. BDE = Dr. AED : Dr. CED. Daher ist Dr. BDE = Dr. CED und folglich BC mit DE gleichlaufend (§. 106, I.)

§. 197.

Lehrsatz. Wenn man den Winkel eines Dreiecks halbirt, und die Theilungslinie zur gegenüberliegenden Dreiecksseite verlängert, so verhält sich der kleinere Schenkel dieses Winkels zum größern, wie der kleinere Abschnitt der getheilten Linie sich zum größern verhält.

Wenn in dem Dreiecke ABC (Fig. 104.) der Winkel B durch BD halbirt wird, so verhält sich AB : BC = AD : DC.

Beweis. Wenn AB über B verlängert wird bis BE = BC ist und wenn man nun EC zieht, so ist W. ABD = W. E (§. 91. *a.*) folglich BD mit EC gleichlaufend (§. 68.) und AB : BE = AD : DC (§. 195.)

§. 198.

Zusatz. Umgekehrt: Wenn sich die zwei Schenkel eines beliebigen Winkels im Dreiecke so zusammen verhalten, wie zwei Stücke in der dritten Seite, so wird eine gerade Linie, aus jenem Winkelpuncte nach dem Theilpuncte dieser Seite gezogen, jenen Winkel halbiren.

Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 104.) AB : BC = AD : DC, so ist W. ABD = W. CBD.

Der Beweis ist der umgekehrte des vorigen. Denn aus AB : BE = AD : DC folget nach §. 196. daß BD mit EC gleichlaufend ist. Daher ist W. ABD = W. E und W. DBC = W. BCE (§. 76.) Allein W. E = W. BCE (§. 24.) folglich auch W. ABD = W. DBC.

§. 199.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel des einen, einzeln genommen, so groß sind, als zwei Winkel des andern, (wodurch auch die dritten Winkel einander gleich sind

§. 90.), so sind die Seiten beider Dreiecke, welche den gleichen Winkeln gegenüberstehen, proportionirt.

Es sei in den Dreiecken (Fig. 105.) ABC und abc der W. B = W. b und W. C = W. c (folglich auch W. A = W. a) so ist AB : BC = ab : bc, AC : CB = ac : cb und AB : AC = ab : ac.

Beweis. Wenn man die beiden Dreiecke so aneinanderstellt, wie es (Fig. 106) zeigt, und die Linien BA, ca bis zum Durchschnittspuncte D verlängert, welcher, wegen W. B + W. c < 2 R, erfolgen muß, so ist AC mit Dc und BD mit Ca gleichlaufend. Daher auch BA : BC = AD (= Ca) : Cc (§. 195.) ferner ca : cC = aD (= CA) : CB, woraus auch die dritte Proportion folgt.

§. 200.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken je zwei Seiten des einen den zwei Seiten des andern proportionirt sind, so sind die Winkel, welche in beiden Dreiecken den ähnlich liegenden Seiten gegenüberstehen, einander gleich.

Wenn in den Dreiecken (Fig. 107.) ABC und abc die Seite AB : BC = ab : bc; AC : CB = ac : cb und BA : AC = ba : ac, so ist W. C = W. c, W. A = W. a, und W. B = W. b.

Beweis. Wenn man Ab = ab macht und die bc mit BC gleichlaufend zieht, so sieht man

leicht, daß, weil nun BA : AC = bA : Ac (§. 195, *a.*) und auch BA : AC = ba : ac ist, nunmehr auch AC = ac seyn muß. Da nun ferner

AB : BC = Ab : bc (im Dr. 1.) (§. 195. *a.*) und AB : BC = ab : bc (im Dr. 2.) so ist auch bc (im Dr. 1) = bc (im Dr. 2) und Dr. Abc ≅ Dr. abc (§. 31.)

§. 200. *a.*

Anmerkung. Man bemerke noch, daß aus der Proportionalität von zwei Paar Seiten in beiden Dreiecken die Proportionalität der dritten Seitenpaare schon von selbst folget. Es sei (Fig. 107.)

AB : BC = ab : bc, und
BC : AC = bc : ac, so ist (§. 189. u. 188.)
AB : AC = ab : ac.

§. 201.

Erklärung. Wenn in zwei Dreiecken die drei Winkel des einen, einzeln genommen, den drei Winkeln des andern gleich und die den gleichen Winkeln gegenüberstehenden Seiten proportional sind, so nennt man die Dreiecke ähnlich. Die Aehnlichkeit derselben besteht also in der Gleichheit dieser einzelnen Winkel und in der Proportionalität der den gleichen Winkeln gegenüberstehenden Seiten. Der in der Anschauungslehre gegebene Begriff: Aehnlichkeit ist Uebereinstimmung in der Gestalt, wird hierdurch schärfer bestimmt und geometrisch begründet.

§. 202.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel des einen einem Winkel des andern gleich ist, und die Schenkel, welche ihn bilden, in beiden Dreiecken proportionirt sind, so sind diese Dreiecke ähnlich.

Es sei (Fig. 107.) W. A = W. a, und BA : AC = ba : ac, so sind die Dreiecke ABC und abc ähnlich, d. h., auch die übrigen ähnlichliegenden Winkel sind gleich und die übrigen ähnlichliegenden Seiten proportionirt.

Beweis. Wenn man das Dreieck abc so in ABC legt, daß die gleichen Winkel a und A sich decken, so sieht man leicht, daß (nach §. 196.) BC mit bc gleichlaufend ist. Da nun W. Abc = W. B und W. Acb = W. C ist (§. 76.) so haben die Dreiecke ABC und abc die Winkel gemein und sind folglich (§. 199.) ähnlich.

§. 203.

Zusatz. I. Die Aehnlichkeit der Dreiecke geht daher aus drei Voraussetzungen hervor:

1) Aus der Gleichheit ihrer Winkel, wozu die Gleichheit von zwei Winkeln schon hinreicht.

2) Aus Proportionalität ihrer Seiten, wozu die Proportionalität von zwei Seitenpaaren schon genug ist.

3) Aus der Gleichheit eines von proportionalen Seiten eingeschlossenen Winkels.

II. Die Folgen, welche aus jeder dieser drei Voraussetzungen fließen, sind leicht zu erkennen. Ihre Entwickelung ist eine lehrreiche Uebung für Anfänger.

§. 204.

Lehrsatz. Wenn man von dem Scheitel des rechten Winkels im rechtwinkeligen Dreiecke ein Loth auf die Hypotenuse zieht, so entstehen zwei kleinere Dreiecke, welche unter sich und dem Ganzen ähnlich sind.

Die Erläuterung an einer Zeichnung und der Beweis ist sehr einfach, nach §. 203, I. 1.

Es ist lehrreich, die verschiedenen Proportionen zu entwickeln, welche aus diesem Satze folgen, da sie für vielfache Anwendungen wichtig sind.

§. 205.

Erklärung. Wenn vier Größen a, b, c, d, nach dieser Ordnung eine Proportion bilden, so nennt man d die vierte Proportionalgröße zu a, b und c. Desgleichen ist a die vierte Proportionalgröße zu d, c und b. Wenn sich a : b = b : c verhält, so heißt c die dritte Proportionalgröße zu a und b, und b wird die mittlere Proportionalgröße zwischen a und c genannt. Auch heißt die Proportion a : b = b : c eine stetige geometrische Proportion.

§. 206.

Aufgabe. Zu drei gegebenen Linien die vierte geometrische Proportionallinie zu finden.

Man soll (Fig. 108.) zu den Linien EF, CD und AB die vierte Proportionallinie finden; so, daß sich EF zu CD, wie AB zu dieser vierten verhält.

Auflösung und Beweis ergeben sich leicht aus dem willkührlichen W. NGD (Fig. 109.), wo GH = EF, GK = CD, HL = AB gemacht, HK gezogen und mit ihr die gleichlaufende LM construirt worden ist. (§. 195.)

§. 207.

Zusatz. Auf ähnliche Weise findet man zu zwei gegebenen Linien eine dritte geometrische Proportionallinie.

§. 208.

Aufgabe. Zu zwei gegebenen Linien die mittlere geometrische Proportionallinie zu finden.

Die gegebenen Linien seien (Fig. 110.) MN und GH. Man soll eine mittlere ED (Fig. 111.) finden, so daß MN : ED = ED : GH ist.

Auflösung und Beweis wird man daraus finden, daß AB (Fig. 111.) = MN + GH gemacht worden, aus der Mitte C ein Halbkreis beschrieben, und in der Entfernung AD = MN das Loth DE

errichtet ist. Denn nun sind die Dreiecke ADE und BDE einander ähnlich (§. 204.) und es ist folglich AD : DE = DE : DB.

§. 209.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie in Theile zu theilen, welche den gegebenen Theilen einer andern geometrisch proportional sind.

Es sei (Fig. 112.) die Linie AB nach den Verhältnissen von AC : CD : DE : EB getheilt; man soll die gegebene Linie AG nach gleichen Verhältnissen theilen.

Auflösung und Beweis ergeben sich aus den mit BG durch E, D und C gezogenen Parallellinien EL, DK und CH nach §. 195, 195, *a*.

§. 210.

Zusatz. Wenn eine gegebene gerade Linie in eine beliebige Menge gleicher Theile getheilt werden soll, so trage man ebensoviele willkührliche gleiche Theile auf eine gerade Linie und verfahre nach §. 209. Hierdurch ist die obige Aufgabe (§. 36.) ganz allgemein aufgelößt.

§. 210. *a*.

Zusatz. Jetzt ist man auch im Stande, irgend einen Theil eines gegebenen Quadrats in ein ihm gleiches Quadrat umzuwandeln. Es sei dieser

Theil z. B. $\frac{5}{7}$, so theile man jede der zwei Parallelseiten des gegebenen Quadrates in 7 gleiche Theile, nehme auf jeder (von einerlei Endpuncte aus) $\frac{5}{7}$ und verbinde beide Stücke durch eine gerade Linie, so entsteht ein Rechteck, welches $\frac{5}{7}$ des Quadrats ist und (nach §. 133. a.) leicht in ein gleichgroßes Quadrat verwandelt werden kann.

§. 211.

Anmerkung. Sollte die gerade Linie in viele gleiche Theile, z. B. in 21 getheilt werden, so theile man sie zuerst in 7 gleiche Theile, und dann den siebenten Theil wieder 3 gleiche Theile so muß der dritte Theil. vom siebenten Theil der ein und zwanzigste Theil vom Ganzen seyn.

§. 212.

Lehrsatz. Rechtwinkelige ähnliche Dreiecke verhalten sich in Hinsicht ihrer Flächen, wie die Quadrate zweier ähnlich liegenden Seiten in ihnen.

Es seien (Fig. 113.) ABC und abc die zwei Dreiecke, so verhält sich Dr. ABC : Dr. abc wie das Quadrat von BC, d. h. BCGD zu dem Quadrate von bc, d. h. bcgd.

Beweis. Wird CD und cd gezogen, so verhält sich Dr. ABC : Dr. DBC = AB : BD; eben so Dr. abc : Dr. dbc = ab : bd (§. 193.) Da aber AB : BD = ab : bd ist, so ist Dr. ABC : Dr. DBC = Dr. abc : Dr. dbc, oder Dr. ABC : Dr. abc = Dr. DBC : Dr. dbc. Da sich nun die

Doppelten wie die Einfachen verhalten, so ist der Lehrsatz erwiesen.

§. 213.

Zusatz. Auch verhalten sich ähnliche Dreiecke überhaupt wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten. Es seien ABC und EFG (Fig. 175.) ähnliche schiefwinkelige Dreiecke so sind auch, wenn die Lothe AD und EH gezogen werden, die Dreiecke ADB und EHF; ferner ADC und EHG einander ähnlich (§. 203, I. 1.) Folglich ist Dr. BAD : Dr. FEH = BA^q : FE^q u. Dr. CAD : Dr. GEH = CA^q : GE^q; daher Dr. BAD + Dr. CAD : Dr. FEH + Dr. GEH = Dr. BAD : Dr. FEH = BA^q : FE^q.

§. 214.

Zusatz. Wenn sich zwei gerade Linien wie 1 : 2 : 3 verhalten, so ist es leicht durch geometrische Construction zu zeigen, daß sich die Quadrate dieser Linien wie 1 : 4 : 9 verhalten. Daher verhalten sich die Flächenräume dreier Dreiecke, deren homologe Seiten 1, 2, 3 sind, wie die Zahlen 1, 4, 9.

§. 215.

Anmerkung. Aus obigem Satze fließt folgender höchst einfache Beweis des Pythagorischen Lehrsatzes (§. 115). Man denke sich ein rechtwinkeliges Dreieck und von dem Scheitel des rechten Winkels ein Loth auf die Hypotenuse, so entstehen zwei kleinere rechtwinkelige Drei-

ecke, welche unter sich und dem ganzen Dreiecke ähnlich sind (§. 204). Diese drei Dreiecke verhalten sich daher auch zu einander wie die Quadrate ihrer drei Hypotenusen. (§. 212.) Da aber die Summe der beiden kleinern Dreiecke dem größern Dreiecke gleich ist, so muß auch das Quadrat der größten Hypotenuse der Summe der Quadrate der zwei andern Hypotenusen, d. h. der Quadratsumme der Catheten, gleich seyn. So viel wir wissen, ist **dieser** Beweis noch nirgends geführt worden.

§. 216.

Anmerkung. Auch verdient noch folgender Beweis dieses merkwürdigen Lehrsatzes hier eine Stelle. Wenn man das vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gezogene Loth durch das über diese Linie construirte Quadrat verlängert, so wird dieses dadurch in zwei Rechtecke getheilt. Da sich nun in jedem der kleinern rechtwinkeligen Dreiecke die kleinere (in der Hypotenuse des großen Dreiecks liegende) Cathete zur Hypotenuse des großen Dreiecks verhält, so ergibt sich, wenn man in diesen beiden Proportionen die Producte aus den äussern und den innern Glieder bildet, die Wahrheit des Pythagorischen Lehrsatzes nach Gründen der rechnenden Geometrie, welche unten weiter entwickelt werden. (Siehe §. 240).

XIII. Aehnlichkeit geradliniger Vielecke.

§. 217.

Lehrsatz. Wenn ähnliche Dreiecke auf ähnliche Weise verbunden werden, so entstehen ähnliche Vielecke daraus, d. h. solche, deren

homologe Seiten proportional und deren homologe Winkel gleich sind.

Es sei (Fig. 114.) Dr. ABC dem Dr. abc, Dr. ADC dem Dr. adc ähnlich, so entstehen, wenn man beide Dreiecke mit ihren gemeinsamen, homologen und gleichen Seiten AC und ac zusammensetzt, zwei ähnliche Vierecke ABCD und abcd.

Beweis. Daß AB, BC mit ab, bc und AD, DC mit ad, dc proportional, auch W. B = W. b; W. D = W. d, ferner W. BAD = W. bad und W. BCD = W. bcd ist, folgt aus der Voraussetzung. Aus

CA : AB = ca : ab und
CA : AD = ca : ad folgt weiter
AB : AD = ab : ad, und auf ähnliche Weise auch
CB : CD = cb : cd.

§. 218.

Zusatz. Hieraus folgt, daß durch gehörige Zusammensetzung von 3, 4, 5 ähnlichen Dreiecken u. s. w., ähnliche Fünf- Sechs- Siebenecke u. s. f. entstehen müssen.

§. 219.

Zusatz. Umgekehrt ist es leicht zu zeigen, daß ähnliche Vielecke durch ähnlich gezogene Querlinien in ähnliche Dreiecke getheilt werden können. Der Beweis ist der umgekehrte von §. 217.

§. 220.

Zusatz. Desgleichen ist klar, daß sich die Umfänge ähnlicher Figuren wie irgend zwei ähnlich liegende Linien in ihnen verhalten. Wenn ABCD und abcd ähnliche Vierecke sind, so ist BA : AD : DC : CB = ba : ad : dc : cb; folglich auch

BA : ba = BA + AD + DC + CB : ba + ad + dc + cb.

§. 221.

Zusatz. Auch wird man leicht finden, daß sich die Flächen ähnlicher Figuren wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten in ihnen verhalten. Der Beweis ist dem vorigen §. 220. ähnlich.

§. 221. a.

Anmerkung. Die ausführlichen Beweise dieser vier wichtigen Sätze (§. 218, 219, 220 u. 221) sind nicht schwer führen; werden aber hier, der Kürze wegen, übergangen. Sehr wichtig ist es jedoch, daß sich die Anfänger in wirklichen Constructionen der dazu gehörigen Figuren üben.

§. 222.

Aufgabe. Ein Vieleck zu construiren, welches einem gegebenen ähnlich ist, ohne auf eine bestimmte Größe des zu construirenden zu sehen.

Man soll ein Sechseck bilden, welches dem gegebenen (Fig. 115.) ABCDEF ähnlich ist.

Auflösung. I. Durch einen in der Fläche des Vielecks angenommenen Punct G

Construction und Beweis ergeben sich aus den Hülfslinien von selbst.

II. Durch einen in der Umfangslinie des Vielecks willkührlich genommenen Punct h (Fig. 116.) und den Querlinien FD, AD, BD.

Auch hier ist Construction und Beweis leicht zu finden.

III. Durch Annahme einer der Linie ED (Fig. 117.) homologen Linie ed, an deren Endpunct d der W. D und der ähnliche Schenkel dc gelegt wird, an dessen Endpunct c wieder der W. C nebst der ähnlichen Seite cb construirt wird u. s. w., bis das kleine Vieleck abgeschlossen ist.

Den Beweis wird man leicht finden.

IV. Nach jeder dieser drei Methoden kann auch das zu construirende Vieleck größer als das gegebene werden.

§. 223.

Aufgabe. Ueber eine gegebene gerade Linie ein Vieleck zu construiren, welches einem gegebenen Vielecke ähnlich ist.

Auflösung. Wäre z. B. über Dh (Fig. 116.) ein Vieleck zu construiren, welches dem Vielecke DHFABC ähnlich ist, so trage man diese Dh (welche der DH homolog seyn soll) von D nach h, ziehe DF, DA, DB und durch h die hf mit HF,

die fa mit FA, die ab mit AB und die bc mit BC gleichlaufend.

Der Beweis ist einfach.

§. 224.

Zusatz. Wenn im rechtwinkeligen Dreiecke über jede Cathete und über die Hypotenuse eine ähnliche Figur beschrieben wird, so ist die über der Hypotenuse construirte so groß an Fläche, als die beiden andern zusammengenommen sind. Der einfachste Fall hievon ist, wenn über jede Cathete und über die Hypotenuse ein gleichseitiges Dreieck beschrieben wird.

§. 224. *a.*

Anmerkung. Unabhängig von dem Pythagorischen Lehrsatze hat der Verfasser dieser Schrift vorstehenden Satz von gleichseitigen Dreiecken in der oben (§. 116, III.) bemerkten Abhandlung bewiesen.

§. 225.

Zusatz. Hieraus ist es leicht:

I. Mehrere gegebene ähnliche Figuren in eine einzige zu verwandeln, die jeder von ihnen ähnlich und allen zusammengenommen gleich ist;

II. Eine Figur zu finden, welche dem Unterschiede zweier ähnlichen Figuren gleich und jeder von ihnen ähnlich ist;

III. Eine gegebene Figur zu verdoppeln, zu verdreifachen, zu halbiren; so, daß das Doppelte, Dreifache, Halbe der gegebenen Figur ähnlich ist.

119. u. 122. §. 221.)

IV. Von einer gegebenen Figur irgend einen bestimmten Theil in eine ihr ähnliche zu verwandeln; z. B. $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{4}{7}$ u. s. f. (§. 210. *a.*)

V. Eine Figur zu construiren, welche $2\frac{1}{2}$, $3\frac{5}{6}$, $4\frac{8}{9}$ mal u. s. w. größer als eine gegebene, und ihr ähnlich ist.

§. 225. *a.*

Anmerkung. I. Es ist eine sehr lehrreiche Uebung für Anfänger, sämmtliche fünf Fälle des vorigen §. an wirklichen Zeichnungen durchzuführen. Dies befestigt die Theorie und gibt eine große Gewandheit für's Practische.

II. Die Zeichnungen und Ausführungen dieser Auflösungen werden, nebst den Beweisen, der Kürze wegen hier übergangen.

Der
geometrischen Wissenschaftslehre
zweiter Cursus.

Rechnende Elementargeometrie.

Rechnende Elementargeometrie.

I. Allgemeine Vorbegriffe.

§. 226.

Erklärung. Messen heißt bestimmen, wie oft eine, zur Einheit angenommene Größe in einer andern, ihr gleichartigen enthalten ist. Die Größe, womit man ausmißt, wird das Maß genennt. (man vergl. oben §. 177.)

§. 227.

Grundsatz. Das Maß und die zu messende Größe müssen gleichartig seyn.

§. 228.

Zusatz. Daher können Linien nur durch Linien, Flächen nur durch Flächen und Körper nur durch Körper gemessen werden.

§. 229.

Zusatz. Das Maß für gerade Linien ist selbst eine gerade Linie. Ihre Größe ist willkührlich. Doch muß sie für einerlei Messung unveränderlich seyn.

§. 230.

Anmerkung. Das Maß, womit im gemeinen Leben die geraden Linien gemessen werden, ist der bekannte Fuß oder Schuh. Seine Größe findet man an verschiedenen Orten sehr verschieden. Der Fuß ist ein natürliches Maß, weil es sehr natürlich ist, die Größe einer geraden Linie, z. B. auf dem Felde, mit dem Fuße des Körpers zu bestimmen. Wir werden uns bei den folgenden Messungen eine kleine gerade Linie als Fußmaß vorstellen, und dieselbe als Einheit unsere Messungen betrachten.

§. 231.

Erklärung. Die Länge des Fußes denkt man sich in zehn gleiche Theile eingetheilt, und nennt einen dieser Theile einen Zoll. Des Zolls zehnter Theil heißt Linie, der Linie zehnter Theil, Punct. Fuße, Zolle, Linien und Puncte werden durch kleine Striche bezeichnet. So heißt $8' \, 6'' \, 5''' \, 4''''$ acht Fuß, sechs Zoll, fünf Linien, vier Puncte. Eine Länge von zehn Fuß wird eine Ruthe genennt. Ihr Zeichen ist eine kleine Nulle, und 36° heißt 36 Ruthen.

§. 232.

Anmerkung. I. Diese Eintheilung des Maßes heißt die zehntheilige oder Decimal-Eintheilung. Im bürgerlichen Leben wird die Ruthe in zwölf Fuß, der Fuß in 12 Zolle, der Zoll in 12 Linien abgetheilt, welches man die zwölftheilige oder Duodecimal-Eintheilung nennt.

II. Da die Decimaleintheilung der Maße mit unserm zehntheiligen Zahlensysteme vollkommen einerlei ist, so gewährt sie bei der Reduction dieser Maße

große Bequemlichkeit. So ist z. B. 18° 4′ 6″ 3‴ = 184′ 6″ 3‴ = 1846″ 3‴ = 18463‴. Umgekehrt ist 8742‴ = 874″ 2‴ = 87′ 4″ 2‴ = 8° 7′ 4″ 2‴ u. s. f.

III. Weit beschwerlicher ist die Verwandlung bei der Duodecimal-Eintheilung. Hier sind z. B. 8° = 8 × 12 = 96′; ferner 6′ = 6 × 12 = 72″; endlich 5° 3′ 4″ 6″ = (5 × 12 + 3′) 4″ 6‴ = 63′ 4″ 6‴ = (63 × 12 + 4″) 6‴ = 760″ 6‴ = (760 × 12 + 6‴) = 9126‴. (Das Zeichen × bedeutet die Multiplication).

§. 233.

Erklärung. Ein Quadrat, welches einen Fuß lang und einen Fuß breit ist, wird Quadratfuß genennt. Gleichwie der Längenfuß das bequemste Maß für die Linien ist, so ist dieser Quadratfuß das einfachste Maß für die Flächen. Aus dieser Erklärung ergibt es sich auch, was man eine Quadratruthe, einen Quadratzoll, eine Quadratlinie heißt.

§. 234.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie mit dem gegebenen Maße zu messen.

Es sei (Fig. 118.) AB die zu messende Linie, m der Maßstab.

Auflösung. Man lege das Maß mit seinem Endpuncte in A, und mit seiner ganzen Länge in AB, so trifft der andere Endpunct in 1 ein. Eben so lege man das Maß von 1 nach 2, von 2 nach 3

u. s. w., so wird man finden, daß es gerade achtmal in die Linie AB gelegt werden kann. Daher ist die Linie AB achtmal so groß als m, und, wenn m den Fuß bedeutet, so ist AB acht Fuß lang.

§. 235.

Zusatz. Wenn bei dem letzten Anlegen des Maßes dasselbe über den Endpunct der zu messenden Linie hinausreicht, so bestimme man noch die Theile des Maßstabes, welche bis zu diesem Endpuncte reichen, d. h. man zähle die Zolle und Linien.

§. 236.

Anmerkung. I. Wie krumme Linien gemessen werden können, soll weiter unten gezeigt werden.

II. Auch bemerke man, daß hier immer nur von einem reinen oder theoretischen, nicht aber von einem angewandten oder practischen Messen gerader Linien, wie z. B. auf dem Felde bei Bestimmung der Entfernung zweier Gegenstände, die Rede ist. Dieses letztere gehört in die practische Elementargeometrie.

II. Ausmessung geradliniger Figuren.

§. 237.

Aufgabe. Ein gegebenes Quadrat auszumessen.

Es sei (Fig. 119.) ABCD das gegebene Quadrat, m der Fuß. Man soll finden, wie viele Quadratfuße das gegebene Quadrat enthält.

Auflösung. I. Wenn DC durch m genau gemessen werden kann, so multiplicire man die Zahl dieser gefundenen Maßtheile mit sich selbst. Das Product bestimmt die Menge der Quadratfuße, welche das gegebene Quadrat enthält.

II. Wenn DC nicht genau mit m gemessen werden kann, so bestimme man, wie viele Theile von m, d. h. wie viele Zolle in DC enthalten sind. Diese Zahl von Zollen, mit sich selbst multiplicirt, gibt die Menge der Quadratzolle in dem gegebenen Quadrate.

Erläuterung. Wenn m in DC viermal genau enthalten ist, so enthält ABCD viermal vier, d. h. 16 Quadratfuße.

Enthielte aber das Quadrat FGHL (Fig. 120.) nach seiner Seite FH, z. B. 4′ 5″, so wird sein Flächeninhalt gefunden, wenn man 4′ 5″ mit sich selbst multiplicirt. Da nun 4′ = 40″, so ist 4′ 5″ = 45″ und das Quadrat FGLH enthält 45 mal 45, d. h. 2025 Quadratzolle.

Der Beweis ergibt sich auf anschauliche Art aus der Figur.

§. 238.

Zusatz. Da nach der Decimaleintheilung der Fuß aus zehn Zollen besteht, so muß der Quadratfuß zehnmal zehn, d. h. 100 Quadratzolle enthalten. Man verwandelt daher Quadratzolle in Quadratfuße, wenn man jene mit 100 dividirt; Quadratfuße aber in Quadratzolle, wenn man jene durch

100 multiplicirt. Daher betragen die im vorigen §. gefundenen 1025 Quadratzolle so viel, als 20 Quadratfuße und 25 Quadratzolle.

§. 238. *a.*

Anmerkung. I. Zur Bezeichnung des Quadratmaßes schreibt man den Buchstaben q zur Rechten oberhalb der Ziffer. So heißt $8^{q\circ}\ 23^{q\prime}\ 46^{q\prime\prime}$ soviel, als 8 Quadratruthen, 23 Quadratfuß, 46 Quadratzolle.

II. Die Decimaleintheilung erleichtert auch hier die Reductionen. So sind $7^{q\circ}\ 23^{q\prime}\ 46^{q\prime\prime} = 823^{q\prime}\ 46^{q\prime\prime} = 82346^{q\prime\prime}$; ferner $12^{q\circ}\ 8^{q\prime}\ 4^{q\prime\prime} = 1208^{q\prime}\ 4^{q\prime\prime} = 120804^{q\prime\prime}$. Desgleichen sind $64834^{q\prime\prime} = 6^{q\circ}\ 48^{q\prime}\ 34^{q\prime\prime}$ u. s. w.

III. Nach der Duodecimalabtheilung ist $1^{q\circ} = 12 \times 12 = 144^{q\prime}$, $1^{q\prime} = 144^{q\prime\prime}$ u. s. f. Wieviel beschwerlicher hier die Reduction sei, läßt sich leicht in Berechnung mehrerer Beispiele zeigen.

§. 239.

Zusatz. Gewöhnlich sagt man, der Inhalt eines Quadrats werde gefunden, wenn man seine Seite mit sich selbst multiplicirt. Dieser Ausdruck ist nicht ganz richtig, weil man eine Linie nicht mit einer Linie multipliciren kann. Besser sagt man daher, diese Fläche werde gefunden, wenn man die Zahl, welche das Maß der Seite des Quadrats ist, mit sich selbst multiplicirt.

§. 240.

Aufgabe. Den Inhalt eines gegebenen Rechtecks zu finden.

Es sei (Fig. 121.) ABCD das gegebene Rechteck.

Auflösung. Man messe Höhe und Grundlinie mit einerlei Maße = m, und multiplicire die hierdurch gefundenen zwei Zahlen miteinander, so gibt das Product die Menge der Quadratmaße, welche das Rechteck enthält.

Erläuterung. Es sei AC = 3 m, CD = 6 m, so ist ABDC = 3mal 6 = 18 Quadratfuße.

Wäre AC = 3′ 4″ und CD = 6′ 8″, so enthielte das Rechteck ABDC 34mal 68, d. h. 2312 Quadratzolle, oder 23 Quadratfuße 12 Quadratzolle.

Der Beweis leuchtet von selbst ein. Practische Uebungen sind sehr zu empfehlen.

§. 241.

Aufgabe. Die Fläche eines schiefen Parallelogramms zu finden.

DEGF (Fig. 122.) sei das zu berechnende Parallelogramm.

Auflösung. Das Maß von FG wird mit dem Maße des Lothes DH multiplicirt.

Der Beweis ergibt sich leicht aus §. 103.

§. 242.

Aufgabe. Den Inhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks zu finden.

Es sei DEF (Fig. 123.) das gegebene Dreieck.

Auflösung. Das halbe Maß der einen Cathete mit dem ganzen Maße der andern, oder das halbe Maß der andern Cathete mit dem ganzen Maße der ersten multiplicirt, oder das halbe Product aus den Zahlen der gemessenen beiden Catheten, gibt den Flächeninhalt des Dreiecks.

Der Beweis und Erläuterungen darüber finden sich leicht (§. 108.)

§. 243.

Aufgabe. Die Fläche des schiefwinkeligen Dreiecks zu finden.

Es sei (Fig. 124.) BAC dieses Dreieck.

Auflösung. Wenn man das Maß der Grundlinie des gegebenen Dreiecks g, seiner senkrechten Höhe h nennt, so ist dessen Inhalt $= \frac{1}{2}$ g mal h, oder $\frac{1}{2}$ h mal g, oder $\frac{1}{2}$ (g mal h).

Der Beweis folgt aus dem vorigen §.

§. 244.

Anmerkung. Welche von diesen drei Auflösungen die bequemste sei, ergibt sich leicht aus den Zahlen, wodurch das Maß der Grundlinie und Höhe bestimmt ist.

§. 245.

Aufgabe. Die Fläche eines Paralleltrapez zu bestimmen.

Es sei (Fig. 125.) ABCD das gegebene Paralleltrapez, dessen Inhalt gefunden werden soll.

Auflösung. Die Summe des Maßes der Parallelseiten wird mit dem Maße ihres halben Abstandes multiplicirt.

Beweis. Wenn man die Querlinie AC zieht, des Dreiecks DAC Grundlinie G, und des Dreiecks CBA Grundlinie g; die ihnen gemeinsame Höhe AE aber h nennt, so ist Dr. DAC $= G \times \frac{1}{2} h$ und Dr. CBA $= g \times \frac{1}{2} h$, folglich ABCD $= (G + g) \times \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} (G + g) \times h$. Ist h eine gerade Zahl, so gebraucht man jenen, ist $G + g$ eine solche, diesen Ausdruck.

§. 246.

Aufgabe. Den Inhalt eines jeden Trapez zu berechnen.

DEFG (Fig. 126.) sei das gegebene Trapez.

Auflösung und Beweis ergeben sich aus den Hülfslinien der Figur. Denn wenn man EG mit G, das Loth FK mit H und das Loth DH mit h bezeichnet, so ist Dr. EFG $= \frac{1}{2} G \times H$, das Dr. EDG $= \frac{1}{2} G \times h$; folglich EFGD $= \frac{1}{2} G \times H + \frac{1}{2} G \times h = \frac{1}{2} G \times (H + h)$ d. h. man findet den Inhalt des Trapez, wenn das Maß der Summe der auf eine Querlinie gezogenen Lothe mit dem halben Maße dieser Grundlinie multiplicirt wird.

§. 247.

Aufgabe. Den Flächeninhalt eines jeden geradlinigen Vielecks zu finden.

ABCDEF (Fig. 127.) sei das gegebene Vieleck.

Auflösung und Beweis folgen sogleich aus Betrachtung der Hülfslinien.

§. 248.

Aufgabe. Den Flächeninhalt einer Figur zu finden, welche theils durch gerade, theils durch krumme Linien eingeschlossen ist.

Es sei (Fig. 128.) ABCDEFGA die zu berechnende Fläche.

Auflösung. Da krumme Linien, welche nur unbedeutende Krümmungen haben, ohne großen Fehler wie gerade Linien zu betrachten sind, so läßt sich die gegebene Figur theils in Paralleltrapeze, theils in Dreiecke theilen, welche, einzeln berechnet und addirt, den Inhalt der ganzen Fläche bestimmen. Die gezogenen Hülfslinien in der Figur erläutern dieses. Wirkliche Beispiele in Zahlen sind sehr nützliche Uebungen für die Anfänger.

§. 249.

Aufgabe. Den Inhalt eines regulären Vielecks zu finden.

Auflösung. Da jedes reguläre Vieleck in so viele congruente Dreiecke getheilt werden kann, als es Seiten hat, so berechne man den Inhalt eines dieser Dreiecke und multiplicire ihn mit der Seitenzahl des Vielecks.

III. Kreisrechnungen.

§. 250.

Lehrsatz. Die Kreislinie ist dem Umfange eines regulären Vielecks von sehr vielen Seiten gleich, welches in die Fläche des Kreises beschrieben wird.

Beweis. Wenn man die Seiten eines regulären Vielecks im Kreise verdoppelt, so fallen sie immer näher an die Kreislinie, und da man diese Verdoppelung stets weiter fortsetzen kann, so wird jede Vielecksseite dem ihr zugehörigen Bogen immer mehr an Größe gleich werden; so, daß man einmal jene Vielecksseiten von diesen Bogen, d. h. den ganzen Umfang des Vielecks von der Kreislinie nicht mehr unterscheiden kann.

§. 251.

Zusatz. Hieraus ergibt sich die Möglichkeit, die Größe der Kreislinie zu bestimmen, wenn man im Stande ist, den Umfang eines in den Kreis beschriebenen Vielecks von sehr vielen Seiten zu messen. Eine nähere Erörterung dieser wichtigen Aufgabe wird unten (Vierter Cursus) vorkommen.

§. 252.

Anmerkung. Die streng wissenschaftliche Darstellung dieser Berechnung gehört noch nicht hieher. Darum reicht es zu, folgende historische Notizen und deren Resultate für die Auflösungen der nachfolgenden Aufgaben beizubringen.

§. 253.

Erklärung. I. Der Erste, welcher sich bemühte, das Verhältniß des Durchmessers zu dem Umfange eines Kreises in Zahlen zu bestimmen, war der vortreffliche griechische Mathematiker Archimedes. Er wurde zu Samos i. J. 287 (vor Christi Geburt) geboren, und im 79ten Jahre seines Alters, bei der Eroberung von Syracus durch die Römer, von einem römischen Soldaten ermordet, als er eben mit seinen Studien beschäftigt war. Er fand durch geometrische Construction eines regelmäßigen 96 Ecks in und eines ähnlichen 96 Ecks um den Kreis, daß das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange kleiner sei als 7 : 22, aber größer als 71 : 223. Da nun diese Verhältnisse von dem Verhältnisse 100 : 314 nicht sehr verschieden sind, so sagt man meist, der Durchmesser eines Kreises verhalte sich zu seiner Peripherie wie 100 : 314, d. h. wenn der Durchmesser z. B. 100 Fuß wäre, so betrüge der Umfang etwa 314 Fuße. Nennt man den Durchmesser D, den Umfang P, so ist D : P = 100 : 314.

II. In neuern Zeiten wurde das Verhältniß von D : P noch weit schärfer berechnet. Ein sehr genaues, leicht zu behaltendes Verhältniß ist dieses: D : P = 113 : 355. Denn wenn man die drei ersten ungeraden Zahlen (1, 3 u. 5) paarweise nebeneinandersetzt, nämlich 113355 und die drei ersten von den drei letzten durch das Verhältnißzeichen (:) trennt, so ist 113 : 355 das Verhältniß von D : P.

III. Für gewöhnliche Fälle ist das Verhältniß D : P = 100 : 314 scharf genug; will man genauer rechnen, so nehme man das andere D : P = 113 : 355. Noch schärfere Verhältnißzahlen kommen unten (im vierten Cursus) vor.

§. 254.

Zusatz. Da alle Kreislinien als Umfänge regulärer Vielecke von unzählig vielen Seiten zu betrachten sind; diese Umfänge sich aber wie ähnlichliegende Linien in solchen Vielecken verhalten, so ist das Verhältniß vom Durchmesser zum Umfang eines Kreises ein beständiges, welches bei allen denkbaren Kreisen Statt finden muß.

§. 255.

Aufgabe. Der Durchmesser eines Kreises ist in bekannten Maßtheilen gegeben; man soll die Größe seines Umfanges in eben diesen Maßtheilen finden.

Auflösung. Ergibt sich nun aus dem Vorhergehenden von selbst.

Beispiele. Es sei D = 48′, oder D = 216′, oder D = 6′ 8″, oder D = 38′ 7″, oder D = 18′ 6′ 8‴; wie groß ist in allen diesen Fällen P?

Man rechne nach beiden Verhältnissen (in §. 253.), um die Unterschiede der Resultate zu finden.

§. 256.

Aufgabe. Aus dem Durchmesser des Kreises und dem Winkel eines Ausschnitts in ihm, die Größe des dem Ausschnitte zugehörigen Bogens zu finden.

Auflösung. Sie folgt aus dem Satze, daß sich 360° zu dem Winkel des Ausschnittes verhalten, wie sich der ganze Umfang des Kreises zu dem zu findenden Bogen verhält.

Beispiele sind leicht zu geben, und müssen dem Anfänger diese Aufgaben erläutern.

§. 257.

Aufgabe. Die Größe der Peripherie eines Kreises ist in bekanntem Maße gegeben. Man soll den dazu gehörigen Durchmesser finden.

Auflösung. Hier braucht man die Verhältnisse $P : D = 314 : 100$, oder $P : D = 355 : 113$. Beispiele zur Erläuterung.

§. 258.

Aufgabe. Aus der Größe eines Kreisgogens und dem dazu gehörigen Winkel des Ausschnittes den Durchmesser des dem Ausschnitte zugehörigen Kreises zu finden.

Auflösung. Wenn der gegebene Bogen B, der in Graden gegebene Winkel x heißt, so ist x : 360° = B : P und man findet hierdurch P oder die Peripherie, und aus dieser (nach §. 257.) den Durchmesser.

Beispiele.

§. 259.

Aufgabe. Aus dem gegebenen Durchmesser eines Kreises und einem Bogen desselben, die Größe des Winkels zu finden, der durch diesen Bogen bestimmt wird.

Auflösung. Aus dem Durchmesser D findet man (nach §. 255.) P und dann durch P : B = 360° : x die Größe von x in Graden.

Beispiele.

§. 260.

Anmerkung. In allen diesen Aufgaben könnte auch statt des Durchmessers der Halbmesser gegeben oder gefunden werden, wodurch mehrere Rechnungsübungen veranlaßt werden.

§. 261.

Aufgabe. Der Durchmesser eines Kreises ist gegeben. Man soll finden, wie viele Minuten ein Bogen desselben enthält, der diesem Durchmesser gleich ist.

Auflösung. Man suche aus dem gegebenen Durchmesser D die Peripherie P und setze nun die

Proportion $P : D = 360° \times 60 : y$, wo y die Menge der zufindenden Minuten darstellt, da $360° = 360 \times 60 = 21600'$ ist.

§. 262.

Lehrsatz. Die Fläche des Kreises ist der Fläche eines in denselben beschriebenen regulären Vielecks von sehr vielen Seiten gleich.

Beweis. Da man die Vielecksseiten ohne Ende verdoppeln kann, und die Fläche des Vielecks hierdurch der Fläche des Kreises immer näher und näher kömmt, (man vergleiche vorzüglich oben §. 168.) so verschwindet die Ebene des Vielecks endlich in der Kreisebene, und beide sind einerlei.

§. 263.

Zusatz. I. Alle Kreisflächen sind daher ähnliche Figuren. Folglich verhalten sich ihre Umfänge wie ihre Durchmesser oder Halbmesser, und ihre Flächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser oder Halbmesser.

II. Wenn sich die Durchmesser zweier Kreise wie 1 : 2 verhalten, so sind ihre Peripherien auch wie 1 : 2 und ihre Inhalte wie 1 : 4. Der doppelte Umfang schlieset also hier den vierfachen Inhalt ein.

§. 264.

Zusatz. Hieraus fließet die Auflösung der Aufgaben: Zwei, oder mehrere Kreise in einen Kreis

zu verwandeln; so, daß seine Fläche den Flächen der gegebenen Kreise gleich ist; einen Kreis zu finden, welcher der Differenz zweier gegebenen Kreise gleich ist; einen Kreis zu construiren, der 3, 4, 5mal, oder $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{6}{7}$mal so groß, als ein gegebener ist; u. s. w. (§. 210, *a.*); oder einen Kreis zu construiren, welcher $3\frac{1}{2}$, $4\frac{2}{7}$, $7\frac{3}{5}$mal so groß als der angegebene ist; u. s. w. (§. 225, V.)

§. 265.

Zusatz. Auch muß jede Kreisfläche einem Dreiecke gleich sein, dessen Grundlinie ihre Peripherie, und dessen Höhe ihr Halbmesser ist. Denn wenn man sich seine Peripherie in eine sehr große Menge gleicher Bogen getheilt und ebensoviele Halbmesser an ihre Endpuncte gezogen denkt, so besteht die Kreisfläche aus der Summe aller dieser Dreiecke, welche sämmtlich den Halbmesser zur Höhe haben. Daß diese Summe aber dem oben genannten Dreiecke gleich ist, folgt aus §. 176, VI.

§. 265. *a.*

Anmerkung. Da jedes Dreieck in ein ihm gleiches Quadrat verwandelt werden kann (§. 133, *b.*) so sieht man hieraus die Möglichkeit, ein der Kreisfläche gleiches Quadrat zu finden, wenn seine Peripherie in einer geraden Linie gegeben wäre. Auch sehe man unten (§. 376.)

§. 266.

Aufgabe. Der Durchmesser oder Halbmesser eines Kreises ist gegeben. Man soll seinen Flächeninhalt berechnen.

Auflösung. Wenn der Radius r, die Peripherie p, die Kreisfläche F heißt, wo denn diese Buchstaben ein für allemal das Maß dieser Größen bedeuten, so ist $F = \frac{1}{2} r \times p$, oder $F = r \times \frac{1}{2} p$, oder $F = \frac{1}{2} (r \times p.)$

Beweis. Ergibt sich aus §. 265 und §. 243.

Beispiele. Es sei r = 8′ oder r = 12′ 8″, oder r = 126′ 5″ u. s. f., wie groß ist die dazu gehörige Fläche?

§. 266. *a.*

Zusatz. I. Da $F = \frac{1}{2} r \times p$ (vor. §.), aber $p = 2 r \times \frac{314}{100} = 2 r \times 3{,}14$, so wird $F = \frac{1}{2} r \times 2 r \times 3{,}14 = r \times r \times 3{,}14$, d. h. wenn man des Halbmessers Maß mit sich selbst und sodann noch mit 3, 14 multiplicirt, so gibt das Product den Flächeninhalt des Kreises. Beispiele erläutern dieses.

II. Das Product einer Zahl mit sich selbst, heißt das Quadrat dieser Zahl und man schreibt statt $r \times r$ nunmehr r^2. Folglich ist $F = r^2 \times 3, 14$. Diese Methode, den Inhalt zu finden, ist bequemer als die vorige (§. 266.) weil man nicht zuerst die Peripherie zu berechnen braucht.

§. 267.

Aufgabe. Aus der gegebenen Peripherie eines Kreises seinen Flächeninhalt zu finden.

Auflösung. Man suche zuerst den Durchmesser, (§. 257.) und sodann die Fläche. (§. 265.)

§. 267. *a*.

Zusatz. Aus 100 : 314 = 2 r : p, folgt (§. 192, II.) $2r = \frac{100}{314} \times p$, folglich $r = \frac{50}{314} \times p$, und $\frac{1}{2} r = \frac{25}{314} \times p$; folglich (§. 266) $F = \frac{25}{314} \times p \times p$, oder $F = p \times p \times 0{,}079$, d. h das Product der Peripherie in sich selbst und in den Bruch 0,079 gibt den Flächeninhalt des Kreises. Daher ist auch $F = p^2 \times 0{,}079$ d. h. die Kreisfläche ist einem Producte aus dem Quadrat der Peripherie in die Zahl 0,079 gleich. Beispiele zur Erläuterung sind leicht.

§. 268.

Aufgabe. Das Verhältniß vom Quadrate des Durchmessers eines Kreises zu seiner Fläche zu bestimmen.

Auflösung. Wenn man D = 100 setzt, so ist P = 314 und die Größe der Kreisfläche = 25 × 314 (§. 266.) = 7850. Daher verhält sich der Inhalt vom Quadrate des Durchmessers zum Inhalte der Kreisfläche wie 10000 : 7850, d. h. wie 1000 : 785.

§. 269.

Aufgabe. Durch Hülfe des Verhältnisses $D^q : F = 1000 : 785$ aus dem gegebenen Durchmesser des Kreises seine Ebene zu berechnen.

Auflösung und Beispiele sind leicht. Denn es ist, für den Durchmesser $= D$, immer $1000 : 785 = D^q : x$, worin $x = \frac{785}{1000} \times D^q$ $= 0,785 \times D^q$ wird.

§. 270.

Aufgabe. Der Winkel des Ausschnittes ist gegeben, nebst dem Halbmesser. Die Größe des Ausschnittes soll berechnet werden.

Auflösung. I. Durch Berechnung des zum Ausschnitte gehörigen Bogens. Denn wenn r der Halbmesser und x° der gegebene Winkel ist, so hat man $360^\circ : x^\circ = 2\,r \times 3,14 : y$ und es ist ferner der Ausschnitt $= \frac{1}{2}\,r \times y = \frac{1}{2}\,y \times r$ (§. 243.)

II. Durch Berechnung der Fläche des ganzen Kreises. Denn da $F = r^2 \times 3,14$ (§. 266, a. II.) so ist nun, für den Winkel des Ausschnittes x°, $360^\circ : x^\circ = r^2 \times 3,14 : y$, wo y die Fläche des Ausschnittes gibt.

Beispiele zur Erläuterung.

§. 271.

Aufgabe. Aus dem gegebenen Inhalte des Ausschnittes und dem Halbmesser, den Winkel des Ausschnittes zu berechnen.

Auflösung. Des Ausschnitts Inhalt durch den halben Radius dividirt, gibt die Größe seines Bogens u. s. f.

Beispiele.

§. 272.

Aufgabe. Wenn der Halbmesser eines Kreises, eine Sehne nebst dem ihr zugehörigen Bogen und der Abstand der Sehne vom Mittelpuncte gegeben ist, die Größe der durch die Sehne bestimmten beiden Abschnitte zu berechnen.

Auflösung. Der kleine Abschnitt ist dem Unterschiede des Ausschnitts und des darin entstehenden Dreiecks; der größere aber dem Unterschiede des ganzen Kreises und dem kleinern Abschnitte gleich.

Beispiele können nach den vorhergehenden §§. leicht berechnet werden.

§. 273.

Aufgabe. Wenn zwei concentrische Kreise gegeben sind, die Fläche des Ringes zu berechnen.

Auflösung. Er ist dem Unterschiede der beiden Kreisflächen gleich. Nennt man den größern Halbmesser R, den kleinern r, so ist der Flächeninhalt des Ringes $= R \times R \times 3{,}14 - r \times r \times 3{,}14 = (R \times R - r \times r) \times 3{,}14$. Da nun $R \times R$ den Inhalt des mit dem größern Halbmesser beschriebenen, $r \times r$ aber die Fläche des mit dem kleinern Radius construirten Quadrates vorstellt, so findet man des Ringes Fläche, wenn der Unterschied der Quadrate der Halbmesser mit 3,14 multiplicirt wird.

§. 274.

Zusatz. Auch kann man den Inhalt eines Ausschnitts vom Ringe finden, wenn die zwei Halbmesser und der Ausschnittswinkel gegeben sind.

§. 275.

Anmerkung. Da dieser Cursus gelehrt hat, gerade Linien zu messen und hierdurch die Linienverhältnisse in Zahlen darzustellen, so sollen hier noch einige lehrreiche Anwendungen davon folgen, welche in dem vorhergehenden Cursus nicht so leicht verständlich gewesen seyn würden.

IV. Linienverhältnisse vermittelst des Kreises

§. 276.

Lehrsatz. Wenn sich zwei Sehnen im Kreise durchschneiden, so ist das Rechteck aus den Segmenten der einen, dem Rechtecke aus den Segmenten der andern gleich.

Es seien (Fig. 129.) AB und CD die sich in E schneidenden Sehnen, so ist das Rechteck aus den Stücken AE und BE dem Rechtecke aus den Stücken CE und DE gleich.

Beweis. Wenn man die Hülfslinien AC und BD zieht, so sind die Dreiecke AEC und DEB ähnlich, weil sie gleiche Winkel, bei A und D, bei C und B haben (§. 148.). Folglich ist $AE : EC = DE : EB$, daher $AE \times EB = EC \times DE$, welche Producte den Inhalt zweier Rechtecke darstellen (§. 240.)

§. 277.

Zusatz. I. Wenn eine Sehne im Kreise auf der Mitte der andern lothrecht steht, so ist das Rechteck aus den Segmenten der größern dem Quadrate der halben kleinen Sehne gleich.

Wenn AB (Fig. 130.) auf MN in deren Mitte D lothrecht steht, so ist das Rechteck aus AD und DB dem Quadrate von MD = DN gleich.

II. Auch sieht man leicht, daß die größere Sehne hier immer ein Durchmesser des Kreises ist. (§. 123, III.)

§. 278.

Zusatz. Hieraus fließet abermal die Aufgabe: Jedes Rechteck in ein ihm gleiches Quadrat zu verwandeln. (§. 133. *a.*)

§. 279.

Zusatz. Auch kann hierdurch jede geradlinige Figur in ein Quadrat von gleicher Größe verwandelt werden. (§. 133. *b.*) Eben dieses gilt von gemischt- und krummlinigen Figuren, und somit auch von der Kreisfläche.

Beispiele zur Erläuterung sind lehrreich.

§. 280.

Lehrsatz. Wenn in einem Kreise irgend ein Viereck beschrieben ist, so sind die zwei Rechtecke aus dessen beiden gegenüberliegenden Seiten zusammengenommen dem Rechtecke aus den beiden Diagonalen gleich.

Es sei (Fig. 131.) ABCD das gegebene Viereck, AC und BD seine Diagonalen, so ist $AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD$.

Beweis. Man ziehe BE so, daß W. CBE = W. ABD wird, so ist auch W. CBD = W. ABE; folglich, wegen W. CDB = W. BAE (§. 148.) das Dr. CDB dem Dr. BAE ähnlich. (§. 203.) Daher ist $AB \times DC = AE \times DB$. Allein Dr. EBC ist auch ähnlich dem Dr. ABD, weil W. BCA = W. ADB (§. 148.) folglich $CB \times DA = CE \times DB$. Aus Beidem wird $CB \times DA + AB \times DC = CE \times DB + AE \times DB = (CE + AE) \times DB = AC \times DB$.

§. 280. *a.*

Zusatz. I. Wenn das in dem Kreise beschriebene Viereck ein Rechteck oder ein Quadrat ist, so ist dieses ein besonderer Fall, der unter dem allgemeinen in §. 280 steht, und seine Wahrheit ergibt sich schon aus §. 115.

II. Um ein gegebenes Rechteck in zwei andere Rechtecke zu verwandeln, construire man einen Kreis, worin des gegebenen Rechtecks Seiten zwei sich schneidende Sehnen sind u. s. w.

III. Auch kann man vermittelst dieses Satzes ein gegebenes Quadrat in zwei unter sich gleiche Quadrate, oder in zwei unter sich gleiche Rechtecke verwandeln.

IV. Auflösungen und Beweise dieser Aufgaben werden die Anfänger unter Anleitung des Lehrers oder durch eignes Studium selbst finden.

§. 281.

Lehrsatz. Wenn von einem willkührlichen Puncte ausserhalb des Kreises zwei gerade Linien dergestalt nach demselben gezogen sind, daß jede dessen Umfang in zwei Puncten durchschneidet, so ist das Rechteck aus dem äussern Segmente der einen dieser Linien in diese ganze Linie dem Rechtecke aus eben diesen Stücken der andern gleich.

Es sei (Fig. 132.) A der gegebene Punct, AB und AC seien die gezogenen Linien, welche den Kreis in D und B, und dann auch in E und C schneiden, so ist das Rechteck aus AD und AB dem Rechtecke aus AE und AC gleich.

Beweis. Ergibt sich, nach gezogenen Hülfslinien DC und BE, aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke ABE und ACD, welche den Winkel A gemeinschaftlich und W. B = W. C (§. 148.) haben. Daher ist AD : AC = AE : AB, woraus der Satz hervorgeht.

§. 282.

Zusatz. I. Wenn die schneidende Linie ADB so lange gegen F rückt, bis sie in diesem Puncte zur Tangente AF wird, so ist das Quadrat von AF dem Rechtecke von AE und AC gleich. Oder allgemein: Wenn von einem Puncte ausserhalb des Kreises eine Tangente an den Kreis (§. 141.) und eine schneidende Linie durch den Kreis gezogen wird, so ist das Quadrat jener Tangente dem

Rechtecke aus dieser schneidenden Linie und ihrem äussern Segmente gleich.

II. Wäre BD ein Durchmesser des Kreises und DA = BD, so müßte das Quadrat der Tangente AF dem doppelten Quadrate des Durchmessers gleich seyn u. s. w.

§. 283.

Anmerkung. I. Die Wahrheit dieses Satzes (vor. §.) ergibt sich auch aus Folgendem: Wenn man (Fig. 133.) CF und FE, auch DF und DE nebst dem Lothe DG zieht, so ist W. DFG + W. GFA = R; auch W. DFG + W. GDE = R, folglich W. GFA = W. GDF; allein es ist auch W. GDF = W. C. (§. 145.) Daher ist das Dr. AFC dem Dr. AEF ähnlich u. s. w.

II. Wenn man mit der Seite eines rechtwinkeligen Dreiecks aus dem Scheitel des spitzen Winkels einen Kreis beschreibt und die Hypotenuse über diesen Scheitel verlängert, bis sie die Peripherie berührt, so kann durch Hülfe dieses Satzes (I.) der pythagorische Lehrsatz bewiesen werden. Diesen Beweis aufzufinden, ist eine lehrreiche Uebung für Anfänger des geometrischen Studiums.

§. 284.

Erklärung. Wenn über der einen Seite einer gegebenen geraden Linie ein Halbkreis, und nach der andern ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck beschrieben, und aus dessen Spitze mit seinem Schenkel ein Quadrant durch den Halbkreis construirt wird, so heißt die von den beiden krummen Linien (einer halben und einer viertels Kreislinie) eingeschlossene Ebene das Mondchen des

Hypocrates, eines berühmten Geometers, der 450 Jahre vor Christus gelebt und diese Fläche zuerst genau zu berechnen gelehrt hat.

Es sei über DB (Fig. 134.) der Halbkreis DAB und das gleichschenkelige rechtwinkelige Dreieck DFB construirt, auch aus F mit FD der Viertelkreis DEB beschrieben, so ist DABED das Mondchen, Lunula Hypocratis

§. 285.

Lehrsatz. Der Flächeninhalt des Mondchens ist dem Quadrate des kleinern Halbmessers gleich.

Oder: DABED = DCFG.

Beweis. Da der Kreis mit DF noch einmal so groß ist, als der Kreis mit DC (§. 263. §. 119.) so muß der Quadrant DFBED dem Halbkreise DBAD gleich seyn. Da aber beide den Abschnittt DBED gemein haben, so ist Dr. DFB = DEBAD. Aber Dr. DFB = DCFG; folglich u. s. w.

§. 286.

Anmerkung. Dieser Satz ist deßhalb lehrreich, weil eine von krummen Linien eingeschlossene Figur ganz genau in ein ihr gleiches Quadrat verwandelt werden kann.

V. Geometrische Theilungen der Figuren.

§. 287.

Anmerkung. Nachstehende] Aufgaben sind absichtlich ohne Zeichnungen aufgelößt worden, weil es eine sehr gute

Uebung für Anfänger ist, sich diese Zeichnungen selbst zu entwerfen und den Beweis sodann aufzufinden. Uebrigens enthalten sie nur die ersten Gründe vom Theilen der Figuren durch geometrische Constructionen.

§. 288.

Aufgabe. Ein gegebenes Dreieck aus einem seiner Winkelpuncte durch eine gerade Linie in zwei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Man ziehe aus diesem Winkelpuncte nach der Mitte der ihm gegenüberstehenden Seite eine gerade Linie, so halbirt diese das Dreieck.

Erläuterung und Beweis ergeben sich von selbst (nach §. 105.).

§. 289.

Zusatz. Eben so leicht ist es, jedes Dreieck aus einem Winkelpuncte in mehrere gleiche oder verhältnißmäßige Theile zu theilen. (§. 209, 210.)

§. 290.

Aufgabe. Aus einem, in einer Dreiecksseite gegebenen Puncte das Dreieck zu halbiren.

Auflösung. I. Läge der gegebene Punct in der Mitte einer Seite, so folgte die Auflösung aus dem vorigen §.

II. Wenn nicht, so ziehe man aus der Mitte jener Seite, worin der gegebene Punct liegt, und aus diesem Puncte selbst nach der gegenüberstehenden Spitze zwei gerade Linien, mit der zweiten aus der

Mitte eine Parallele, und verbinde den Punct, wo sie in der andern Seite eintrifft, mit dem zuerst gegebenen Puncte durch eine gerade Linie, so halbirt letztere das Dreieck.

Beweis. Folgt aus dem Satze, daß Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe gleich sind.

§. 291.

Zusatz. Aehnlich ist die Auflösung der Aufgabe: Aus einem in der Seite des Dreiecks gegebenen Puncte dasselbe in mehrere gleiche oder verhältnißmäßige Theile zu theilen.

§. 292.

Aufgabe. Aus einem in der Fläche eines Dreiecks gegebenen Puncte dasselbe in zwei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. I. Wenn der gegebene Punct in einer geraden Linie liegt, welche von einem Scheitel nach der Mitte der ihm gegenüberstehenden Seite gezogen wird, so ist die Aufgabe von selbst aufgelößt.

II. Fällt der gegebene Punct aber zur Seite dieser gezogenen Linie, so verbinde man ihn mit dem Scheitel jenes Winkels, woraus sie gezogen worden, durch eine gerade Linie, ziehe aus der Mitte der getheilten Seite eine Parallele mit ihr, welche die gegenüberstehende Dreiecksseite trifft, und verbinde diesen Durchschnittspunct mit dem gegebenen Puncte durch eine gerade Linie, so ist, wenn man noch aus dem gegebenen Puncte nach der Mitte

der halbirten Seite eine gerade Linie zieht, das ganze Dreieck in zwei gleiche Vierecke getheilt.

§. 293.

Zusatz. Auch kann das Dreieck aus dem darin gegebenen Puncte in mehrere gleiche oder verhältnißmäßige Theile eingetheilt werden.

§. 294.

Aufgabe. Ein Dreieck durch eine Linie, welche mit irgend einer Seite desselben gleichlaufend ist, in zwei gleiche Stücke zu theilen.

Auflösung. Man halbire die Dreiecksseite, womit die zu findende Linie parallel seyn soll, errichte aus ihrer Mitte ausserhalb des Dreiecks ein Loth, welches dieser halben Seite gleich ist, ziehe aus einem ihrer Endpuncte nach dem Ende dieses Lothes eine Hypotenuse, beschreibe mit ihr, als Halbmesser, einen Bogen, der die halbirte Seite schneidet, ziehe durch diesen Punct eine gleichlaufende Linie mit jener Dreiecksseite, woran der Mittelpunct des Bogens liegt, bis sie die andere Dreiecksseite durchschneidet, und endlich durch diesen letzten Punct eine Parallele mit der ersten Seite des Dreiecks, so ist dessen Theilung, der Forderung gemäß, vollbracht.

Beweis. Beruht vorzüglich auf dem Satze, daß sich ähnliche Dreiecke wie die Quadrate ähnlich liegender Linien in ihnen verhalten.

§. 295.

Zusatz. Wie das gegebene Dreieck durch solche Parallellinien in mehrere entweder gleiche oder verhältnißmäßige Theile zu theilen ist, wird man nun auch (vermittelst §. 294 und §. 115) finden.

§. 296.

Aufgabe. Ein gegebenes Dreieck durch drei gerade Linien, welche von dessen Winkelpuncten nach einem Puncte in seiner Ebene zusammentreffen, in drei gleiche Theile zu theilen. Wo liegt dieser Punct?

Auflösung. Man nehme von einer Seite den dritten Theil, ziehe aus dem Theilungspuncte nach der gegenüberliegenden Spitze eine gerade Linie, und durch eben diesen Punct eine Parallele mit der ihm zunächst liegenden Dreiecksseite, so liegt der gesuchte Punct in der Mitte dieser Linie.

Beweis. Dieser wird, aus der Construction dieser Linien, leicht gefunden werden.

§. 297.

Aufgabe. Ein Parallelogramm durch eine gerade Linie in zwei gleiche Vierecke zu theilen, welche nicht wieder Parallelogramme sind.

Auflösung. Wenn man die größte Diagonallinie darin zieht, dieselbe halbirt, und um diesen festen Punct im Kreise herumbeweget, so entspricht sie in jeder Lage der Forderung der Aufgabe.

§. 298.

Aufgabe. Ein Parallelogramm durch zwei aus einem Winkelpuncte gezogene gerade Linien in drei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Nachdem man von dem Winkelpuncte, der dem gegebenen gegenüberliegt, auf jeder der zwei anliegenden Seiten des Parallelogramms den dritten Theil derselben genommen hat, ziehe man aus diesen Theilungspuncten nach der gegebenen Winkelspitze zwei gerade Linien, so entstehen hierdurch die drei gleichen Theile.

§. 299.

Zusatz. Auf ähnliche Weise kann das Parallelogramm hierdurch in vier, fünf, sechs u. s. f. gleiche Theile eingetheilt werden. Bei jeder geraden Zahl dieser gleichen Theile ist eine der Theilungslinien die Diagonale des Parallelogramms; bei jeder ungeraden Zahl solcher Theile aber nicht.

§. 300.

Aufgabe. Ein Paralleltrapez auf leichte Art in beliebige gleiche oder verhältnißmäßige Theile zu theilen.

Auflösung. Wenn man die beiden Parallelseiten in die verlangte Anzahl gleicher oder verhältnißmäßiger Theile theilet, und die Verbindungslinien zieht, so ist die Aufgabe aufgelößt.

Der
geometrischen Wissenschaftslehre
dritter Cursus.

Practische Elementargeometrie.

Practische Elementargeometrie.

I. Vom Messen gerader Linien.

§. 301.

Erklärung. Die practische Elementargeometrie ist jener Theil der Geometrie überhaupt, welcher lehrt, wie Linien, Flächen und Körper, welche man an wirklichen Dingen betrachten kann, gemessen, d. h. nach ihrer Größe bestimmt werden können.

§. 302.

Anmerkung. Die Anwendung der Geometrie auf das bürgerliche Leben hat einen sehr großen Umfang. Hier kann nur von der practischen Linien- und Flächenmessung, und von dieser nur nach ihren allerersten Elementen gehandelt werden.

§. 303.

Erklärung. Auch bei dem practischen Feldmessen ist der Fuß die willkührliche Einheit, welche bald in 10, bald in 12 gleiche Theile abgetheilt wird. Jenes gibt das Decimalmaß, dieses das Werkmaß. Obschon sowohl die Größe des Fußes, als auch der Ruthe in verschiedenen Ländern sehr verschieden ist, so folgt der Geometer bei seinen

Messungen und Rechnungen am Bequemsten der Decimal-Eintheilung, indem er die landesübliche Ruthe in 10 gleiche Theile theilt.

§. 303. *a.*

Zusatz. Zur Verwandlung der Decimalschuhe in Duodecimalschuhe, und umgekehrt, dient folgendes Verfahren. Man nenne D den zehntheiligen und d den zwölftheiligen Fuß, so ist $10\,D = 10\,d$, folglich $D = 1{,}2\,d$, und $d = \frac{10}{12}D$, oder $d = \frac{5}{6}D$.

Beispiele zur Uebung sind leicht zu berechnen.

§. 304.

Erklärung. I. Um gerade Linien, theils auf dem Papiere, theils auf dem Felde zu ziehen und ihre Größe zu bestimmen, bedient man sich verschiedener Werkzeuge. Die einfachsten davon sind: das gewöhnliche Lineal, das Winkellineal, der Cirkel, die Meßkette, Meßruthe oder Meßschnur, die Meßstäbe und die Meßpflöcke.

II. Das einfache Lineal ist eine, aus hartem Holze, Metall oder einer andern festen Materie verfertigte, dünne, willkührlich breite und vielmal längere Platte, welche die nöthige Eigenschaft haben muß, daß die beiden Kanten, so viel es seyn kann, gerade Linien bilden. In je höherem Grade dieses die Kunst erreicht, desto näher kömmt die Kante des Werkzeugs seinem Ideale, d. h. der geraden mathematischen Linie. Sein Gebrauch besteht darin, daß man es an zwei physische

Puncte, so scharf dies möglich ist, anleget, und nun mit einem zugespitzten Körper, z. B. dem Bleistifte, oder der Reisfeder, von einem dieser Puncte auf dem Papiere gegen den andern hinfährt, und dieselbe mit einer zarten physischen Linie verbindet, welche das Sinnbild der geometrischen ist.

III. Das Winkellineal ist eine Verbindung von zwei einfachen Linealen, welche dergestalt zusammengefügt sind, daß ihre äussere Kanten einen rechten Winkel bilden. Je genauer dieses Statt findet, desto vollkommener ist das Instrument. Es dient, um entweder aus dem Endpuncte oder aus einem andern Puncte in oder ausser einer geraden Linie ein Loth auf sie zu errichten. Man legt nämlich die eine Kante des Lineals dergestalt auf die gerade Linie, daß sein Scheitelpunct auf den bestimmten Punct in derselben fällt; oder so, daß der Punct ausser der geraden Linie in dem einen Schenkel des Lineals, die gerade Linie aber sich in dessen anderm Schenkel befindet, und zieht nun längs des, den rechten Winkel bildenden Schenkels eine feine physische Linie.

IV. Der Cirkel besteht meist aus zwei messingenen, charnierartig verbundenen Seitenstücken, worin sich zwei stählerne Füße befinden, welche nach Unten wohl zugespitzt sind. Seine Güte hängt von der gleichen Länge der Füße, ihrer leichten Beweglichkeit und der Feinheit ihrer Spitzen ab. Sein Gebrauch ist, entweder eine auf dem Papiere gezogene unbestimmte gerade Linie einer gegebenen

geraden gleich zu machen, oder aus einem bestimmten Puncte, mit einem gegebenen Halbmesser, einen Kreis zu beschreiben u. s. w.

V, Die Meßruthe ist der Maßstab für gerade Linien auf dem Felde. Sie besteht aus einer geraden, eine oder zwei Ruthen langen Stange von geradfaserigem, wohl ausgetrokneten und mit Oelfarbe überzogenen Holze. Sie ist durch eingeschlagene Nägel in Fuße und Zolle abgetheilt, auch an beiden Enden mit Metall beschlagen.

Meßschnüre sind Stricke, welche eine oder mehrere Ruthen lang, ebenfalls in halbe Ruthen und Fuße abgetheilt, aber minder brauchbar für die Ausübung sind, weil feuchte oder trockene Witterung ihre Länge leicht verändert.

Meßketten sind weit zweckmäßiger. Sie bestehen aus Gliedern von Eisendrath, welche durch messingene Ringe verbunden sind. Jedes Glied ist einen Fuß lang. Auch wird das Ende jeder halben und ganzen Ruthe angedeutet. Ihre Länge kann drei Ruthen betragen. An jedem Ende befindet sich ein größerer Ring, der zur Handhabe dient, um die Kette gehörig anzuspannen.

VI. Die Meßstäbe sind gerade, runde, ungefähr sechs Fuß lange Stäbe von festem Holze, welche an dem einen Ende zugespitzt und mit Eisen beschlagen sind, damit sie desto bequemer in die Erde eingeschlagen werden können. Ihr Gebrauch wird sich sogleich zeigen. Um sie auf dem Felde in großer Entfernung sichtbar zu machen, pflegt man

an ihr oberes Ende ein Fähnchen von farbigem Zeuge zu befestigen.

VII. Die Meßpflöcke sind kleine, etwa anderthalb bis zwei Fuß lange, an einem Ende wohl zugespitzte, mit Eisen beschlagene, runde hölzerne Stäbe. Sie stellen dasjenige auf dem Felde vor, was ein zarter physischer Punct auf dem Papier, oder ein geometrischer in Gedanken bedeutet. Ihr Gebrauch wird bald deutlich werden.

§. 305.

Anmerkung. Es ist nöthig, daß sämmtliche Werkzeuge, welche hier blos mit Worten erklärt worden sind, dem Anfänger wenigstens in Modellen vorgezeigt werden, damit die eigne Anschauung dasjenige berichtige und ergänze, was an Deutlichkeit der Einsicht fehlt.

Eben dieser Deutlichkeit wegen, muß auch der folgende Vortrag der practischgeometrischen Elementarlehren etwas wortreicher seyn.

§. 306.

Aufgabe. Eine gerade Linie auf dem Felde abzustecken und zu messen.

Gesetzt, die Gegenstände A und B (Fig. 135.) befänden sich auf einem ebenen Felde. Man soll die Größe der geraden Linie von A bis B nach Ruthen und Fußen bestimmen, wobei vorausgesetzt wird, daß sich zwischen A und B kein Hinderniß befindet, welches das unmittelbare Messen unmöglich macht.

Auflösung. I. Man errichte sowohl in A als in B einen Meßstab dergestalt, daß jeder mit der Ebene der Erde auf allen Seiten rechte Winkel bildet, d. h. so, daß jeder Stab lothrecht auf der Erde steht. Mit einiger Uebung wird man dies leicht zu Stande bringen. Diese Meßstäbe stellen nun die zwei Puncte vor, zwischen welchen nur eine gerade Linie möglich ist. Diese gerade Linie AB ist daher sowohl der Lage, als der Größe nach bestimmt, d. h. abgesteckt.

II. Man lege das eine Ende der Meßkette, oder der Meßruthe, an den Stab in A auf die Erde. Ein Gehülfe halte an das andere Ende einen zweiten Stab in senkrechter Richtung auf die Erde, und bewege ihn so lange von der einen Seite nach der andern, bis das Auge hinter dem ersten Stabe in A, welches nach jenem in B visiret, diesen mittleren Stab nicht mehr wahrnimmt. Dieses Visiren muß in einer Entfernung von etwa zwei Schritten hinter dem Stabe A, und so geschehen, daß man z. B. bei geschlossenem linken Auge mit dem rechten längs der rechten Seite dieses Stabes nach jenem in B hinblickt. Der eingesteckte mittlere Stab befinde sich nun in C, so sind die Puncte A, C und B in einer geraden Linie ACB, und C ist um die Länge der Meßkette, oder der Meßstange von A entfernt.

III. Nun lege man das eine Ende des Maßstabes an den Stab in C, der Gehülfe bewege an dessen anderm Ende in D einen auf dem Boden

senkrecht stehenden Stab so lange hin und her, bis dieser Stab in D, bei dem Visiren von C nach B, nicht mehr gesehen wird. Die Linie von A nach D liegt wieder in der geraden Linie AB, und ist der doppelten Länge des Maßstabes gleich.

IV. Auf ähnliche Art fahre man fort, und bemerke, wie oft das Anlegen des Maßstabes durch die Stäbe C, D, E, F, G, H, I, K, L bis nach B geschehen ist. So oft dieses geschah, so oft enthält die zu messende Linie AB den Maßstab. Wenn der Raum von dem letzten Stabe in L nach B kleiner ist, als der ganze Maßstab, so bestimme man diese Linie LB durch die Menge von Fußen, die sie enthält.

§. 307.

Anmerkung. Selten ist die Fläche des Feldes, worauf die geraden Linien gemessen werden sollen, so eben, daß man, ohne merklichen Fehler, die Meßkette gerade auf sie hinlegen dürfte. Oft finden sich kleine Vertiefungen und Erhöhungen, oder andere Hindernisse, z. B. kleine Gräben, niederes Gesträuch u. s. w. vor, welche das Auflegen der Kette oder des Ruthenmaßes nicht gestatten.

In diesen Fällen muß man die Kette über diesen Hindernissen hinweg, so viel es seyn kann, gleichlaufend mit dem Boden anspannen, oder eben so das Ruthenmaß anlegen.

§. 308.

Erklärung. Um gerade Linien, deren Größe man auf dem Felde durch das wirkliche Messen (§. 306.) bestimmt hat, auf das Papier zu verzeichnen, dient der verjüngte Maßstab. Man

nimmt eine willkührliche kleine gerade Linie auf dem Papiere für eine Ruthe an, und erhält, durch eine besondere Construction, die Größe der Fuße und Zolle. Hierdurch bekömmt man Linien auf dem Papiere, die sich so zu den Linien auf dem Felde verhalten, wie der verjüngte Maßstab zum Feld-Maßstabe. Wie wichtig dieser verjüngte Maßstab für die practische Geometrie ist, werden die sogleich folgenden Anwendungen zeigen.

§. 309.

Aufgabe. Einen verjüngten Maßstab zu verzeichnen.

Auflösung. Wenn (Fig. 136.) AB die Größe einer Ruthe bedeutet, so ist Ab ein Fuß, und man wird sich leicht aus Construction der übrigen Linien überzeugen, daß die kleinen Linien a1, b2, c3, d4, e5, f6, g7, h8, m9 der Ordnung nach 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 Zolle bedeuten.

§. 310.

Zusatz. I. Soll man auf dem Papiere eine gerade Linie ziehen, welche eine gegebene Menge von Ruthen enthält, so fasse man die Linie AB so oft in den Zirkel, als diese Ruthenzahl beträgt. Der Bequemlichkeit wegen kann aber der Maßstab über E hinaus so weit fortgesetzt werden, bis man eine Linie von etwa zehn Ruthen bekömmt. Diese aufgefaßte Linie wird sodann auf die gezogene Linie getragen.

II. Bestände die zu construirende Linie aus Ruthen und Fußen, so nimmt man die ersteren auf den vor EB vorhergehenden Linien; letztere aber auf BA von B gegen A hin. So ist Eh = 1° 3′; Ed = 1° 7; Eb = 1° 9′ u. s. f. Ferner wäre EB + Ef = 2° 5′; 2 EB + Eh = 3° 3′; 4 EB + Ek = 5° 2′ u. s. f. wobei sich von selbst versteht, daß die Linien 2 EB, 3 EB, 4 EB u. s. w. auf dem zur Rechten über E verlängerten Maßstabe genommen werden.

III. Soll man Zolle allein greifen, so findet man sie auf den Querlinien des Dreiecks GDB oder CAb. Denn a1 ist 1 Zoll; b2 sind 2 Zolle; g7 sind 7 Zolle; m9 sind 9 Zolle u. s. w. Wollte man aber Schuhe und Zolle zusammenfassen, so müssen sie in den Parallellinien über AB gegriffen werden. So ist die Linie x2 = 4′ 2″, die y6 = 6′ 6″, die z8 = 3′ 8″, die w9 = 7′ 9″ u. s. f.

IV. Sollen Ruthen, Fuß und Zolle zusammengenommen werden, so nehme man auf den mit AB parallelen und zur Rechten von DB verlängerten Linien die Ruthen; die Schuhe und Zolle aber nach III, so, daß man alles auf einmal greifet. Es ist nämlich die Linie Rx = 1° 4′ 2″, die Sy = 1° 6′ 6″, die Wt = 1° 7′ 9″ u. s. w.

§. 311.

Anmerkung. Wollte man für die Größe der Feldruthe die Linie AB annehmen, so würde eine Länge von etwa zwanzig Ruthen einen sehr großen Raum auf dem

Papiere erfodern. Daher kann man diese Linie AB für zehn Ruthen gelten lassen, wodurch Ab = 1° wird. Die kleinen Querlinien a 1, b 2 u. s. w., die vorhin Zolle waren, werden nun Schuhe vorstellen. Hieraus folgt, daß man die Größe einer Ruthe auf dem Papiere verhältnißmäßig, d. h. mit Berücksichtigung der Größe dieser Linien auf dem Felde, und der Größe des Papiers u. s. f. annehmen müsse.

§. 312.

Anmerkung. Aus dem Vorhergehenden sieht man, worauf sich das unmittelbare Messen der Linien auf dem Felde gründet. Er setzt voraus, daß man den Maßstab unmittelbar in die zu messende Linie legen kann. Dies ist nicht immer möglich, ja es treten oft Fälle ein, wo man Entfernungen bestimmen soll, die sich, wegen mancherlei Hindernissen, nicht unmittelbar messen lassen. Zur Auflösung solcher Aufgaben muß sich die Theorie mit der Praxis verbinden. Folgende Beispiele werden dies deutlich machen.

II. Das Messen der Entfernungen mit einfachen Werkzeugen.

§. 313.

Aufgabe. Die Entfernung zweier Gegenstände auf dem Felde zu messen, welche, wegen eines dazwischen liegenden Hindernisses, nicht unmittelbar bestimmt werden kann.

Man soll (Fig. 137.) die gerade Linie von A nach B bestimmen. Ein Hinderniß, z. B. ein

Sumpf, ein Haus, eine Mauer u. s. f. verstattet nicht, von A nach B unmittelbar zu messen.

Auflösung. I. Man wähle sich einen Punct C zum Standpuncte, aus welchem man nach A und B ungehindert sehen und messen kann.

II. Man messe die gerade Linie AC und trage sie geradlinig zurück in E; so, daß CE = AC. Desgleichen messe man die BC, und trage sie in ihrer Verlängerung rückwärts in D; so, daß BC = CD.

III. Wird nun von D nach E die gerade Linie DE gemessen, so muß diese der zu messenden AB gleich seyn.

Beweis. Ergibt sich aus der Congruenz der Dreiecke ACB und ECD (nach §. 22.)

§. 314.

Zusatz. I. Könnte man, wegen eines Hindernisses, diese ganzen Linien CA und CB nicht zurück in E und in D tragen, so trage man ihre Hälfte (z. B. CH und CG), ihren dritten oder vierten Theil rückwärts. Die gerade Linie (GH), welche nun die Endpuncte verbindet, muß die Hälfte, der dritte oder vierte Theil von der Linie AB seyn. (§. 203, I. 3.)

II. Wenn es durchaus unmöglich wäre, die Linien CA und CB um irgend einen Theil rückwärts zu verlängern, so kann man einen bestimmten Theil derselben, etwa den dritten oder vierten, von C gegen A, und von C gegen B tragen, und die End-

puncte dieser Stücke durch eine gerade Linie verbinden. Wäre z. B. CM = $\frac{1}{3}$ CA und CN = $\frac{1}{3}$ CB, so muß auch MN = $\frac{1}{3}$ AB seyn. (§. 203, I. 3.)

§. 315.

Aufgabe. An das Ende einer geraden, auf dem Felde gegebenen Linie einen Winkel zu legen, der einem andern, ebenfalls auf dem Felde befindlichen, gleich ist.

Es seien (Fig. 138.) A, B und C drei Stäbe, welche die geraden Linien AB und BC bestimmen, die in B den W. ABC bilden. Man soll an den Endpunct C einen W. BCH = W. ABC legen.

Auflösung. I. Man trage von B gegen A und gegen C eine bekannte Länge, z. B. BD = BE = 3° und messe die gerade Verbindungslinie DE.

II. Nun trage man von C gegen B die Linie CF = BE, befestige sowohl in F als in C eine Meßkette, nehme auf jener eine Linie FG = DE, auf dieser eine Linie = CF und bewege dieselbe, indem man beide ausspannt, so lange hin und her, bis sie in dem Puncte G sich berühren.

III. In diesen Punct G stecke man einen Stab und ziehe eine gerade Linie CGH, so ist W. BCH = W. ABC.

Beweis. Denn die Dreiecke DBE und FCG sind congruent. (§. 31.)

§. 316.

Zusatz. Auf dem Papiere wird diese Aufgabe vermittelst des Cirkels, auf ähnliche Weise, gelößet. Man greift nämlich aus dem Scheitel des gegebenen Winkels ABC auf seinen Schenkeln eine willkühr-liche Linie BD = BE, trägt dieselbe aus C auf CB in F und beschreibt nun mit dem andern Cirkel-fuße gegen H hin einen Bogen. Nun faßt man die DE in den Cirkel, setzt dessen einen Fuß in F, und beschreibt einen zweiten Bogen, der den ersten in G schneidet. Wird nun die gerade Linie CGH gezogen, so ist W. ABC = W. BCG.

§. 317.

Aufgabe. Den Abstand zweier Gegen-stände auf dem Felde zu bestimmen, welche eine solche Lage haben, daß man nur zu dem einen kommen und messen kann.

Es seien A und B (Fig. 139.) die beiden Gegen-stände, deren Entfernung gemessen werden soll. Der eine B hat eine solche Lage, daß man wegen eines besondern Hindernisses, z. B. wegen eines Sumpfes oder See's, nicht zu ihm kommen und messen kann.

Auflösung. I. Man wähle einen Standpunct C, der so gelegen ist, daß man bequem nach A messen kann.

II. Man messe CA wirklich, trage sie in ihrer Verlängerung rückwärts; so, daß CD = CA und lege an D einen W. CDF = W. CAB. (§. 315.)

III. Man verlängere DF so lange, bis man in einen Punct E kömmt, der mit C und B in einerlei geraden Linien liegt, welches dann Statt findet, wenn die Stäbe in B und E den mittlern Stab bedecken.

IV. Man messe die Linie ED, so muß ED = AB seyn.

Beweis. Folgt wieder aus der Congruenz der Dreiecke CAB und CDE. (§. 26.)

§. 318.

Zusatz. Wenn man verhindert ist, die ganze Linie CA zurückzutragen, so kann man ihre Hälfte, oder ihr Drittel dafür nehmen, wo denn die gefundene Linie die Hälfte, oder das Drittel der zu messenden Linie AB seyn muß. (§. 203, I. 1.)

§. 319.

Aufgabe. Man soll die Entfernung zweier Gegenstände bestimmen, unter der Voraussetzung, daß man zu keinem von ihnen unmittelbar messen kann.

Man soll (Fig. 140.) die Entfernung AB messen, ohne daß man weder nach A, noch nach B kommen kann.

Auflösung. I. Man wähle zwei Standpuncte C und D, und finde (nach §. 317.) die Linie EG = AD.

II. Man wähle noch den dritten Standpunct F und bestimme auch hier wieder die Entfernung MH = BD. (§. 317.)

III. Man verlängere die Linien AD und BD rückwärts, nehme DO = EG, DN = HM und messe die Verbindungslinie NO, so hat man auch das Maß von AB gefunden.

Der Beweis folgt leicht aus dem Vorhergehenden.

III. Figuren auf dem Felde in den Grund zu legen.

§. 320.

Erklärung. Eine Figur in den Grund legen heißt, auf dem Papiere nach dem verjüngten Maßstabe eine Figur construiren, welche der auf dem Felde gegebenen ähnlich ist.

§. 321.

Anmerkung. Dergleichen Figuren auf dem Felde sind Grundstücke von verschiedener Art, z. B. Aecker, Wiesen, Gärten u. s. w. Obgleich nun ihre Grenzen nicht nach vollkommen geraden Linien bestimmt sind, so kann man dieselbe doch meist als solche annehmen; indem man sich gerade Linien vorstellt, welche die gesammten Winkelpuncte verbinden, wodurch das Grundstück auf eine geradlinige geometrische Figur reducirt wird. Wie krummlinige Grenzlinien zu behandeln sind, folgt weiter unten.

§. 322.

Aufgabe. Eine auf dem Felde gegebene Figur in den Grund zu legen, wenn ihre Grenzen als gerade Linien zu betrachten sind.

Es sei (Fig. 141.) ABCDE die Figur auf dem Felde. Man soll eine ihr ähnliche auf dem Papiere verzeichnen.

Auflösung. I. Man stecke in alle Winkelpuncte A, B, C, D und E der gegebenen Figur senkrechtstehende Meßstäbe, so ist dieselbe durch die mathematischen Linien AB, BC, CD, DE und EA, welche man sich in Gedanken vorstellt, begrenzt.

II. Man theile diese Figur durch Querlinien, z. B. durch EB und EC in die Dreiecke AEB, BEC und CED, und wähle hierzu solche Linien, welche, nach den vorhandenen Umständen, am Bequemsten gemessen werden können.

III. Man messe von jedem dieser Dreiecke die drei Seiten auf dem Felde, und schreibe das gefundene Maß einer jeden auf die zugehörigen Linien einer aus freier Hand gezeichneten Figur, welche mit der gegebenen gleichviele Seiten und ähnlich liegende Querlinien hat.

IV. Nun ziehe man auf dem Papiere eine gerade Linie ae, mache sie mit dem Cirkel nach dem verjüngten Maßstabe so groß, als AE nach dem Feldmaßstabe ist. Desgleichen beschreibe man aus a und e mit zwei Linien ab und eb, welche nach dem verjüngten Maßstabe so viel halten, als AB und

EB nach dem großen, zwei sich in b schneidende Bogen. Zieht man nun ab und eb, so ist das Dreieck aeb dem Dreiecke AEB ähnlich. (§. 203, I. 2.)

V. Auf gleiche Weise wird über eb das dem Dr. ECB ähnliche kleine Dreieck ecb und über ec das dem Dr. ECD ähnliche Dreieck ecd beschrieben, wodurch die Figur abcde der Figur ABCDE ähnlich wird.

Der Beweis wird jedem leicht zu finden seyn, der die bisherigen Lehren gefaßt hat. (§. 217.)

§. 323.

Aufgabe. Eine Figur in den Grund zu legen, welche theils von geraden, theils von krummen Linien eingeschlossen ist.

Es sei (Fig. 142.) ABCDEIHA die gegebene Figur auf dem Felde. Man soll eine ihr ähnliche auf dem Papiere construiren.

Auflösung. I. Nachdem man an die Winkelpuncte ABCDE Stäbe gesteckt hat, nehme man in der krummen Linie EIHA so kleine Stücke, daß man sie, ohne großen Fehler, für gerade betrachten kann, und bemerke sich dieselbe durch die Stäbe in K, I, H, G und F.

II. Vermittelst eines großen, aus zwei Lattenstücken verfertigten rechten Winkels (oder durch das sogenannte Winkelkreuz C dessen Einrichtung der Lehrer hier zu erklären hat) bestimme man in der Linie AE die Puncte L, M, N, O, P, in welchen

die Lothe von F, G, H, I, K, in AE eintreffen, und messe die Linien AL und LF, LM und MG, MN und NH, NO und OI, OP und PK. Alle diese Maße trage man wieder auf die ähnlich liegende Linien einer aus freier Hand verfertigten Zeichnung.

III. Nun construire man auf dem Papiere eine Figur abcde, welche ABCDE ähnlich ist (§. 322.) mache al = AL, lm = LM, mn = MN, no = NO, op = OP, errichte die Lothe lf = LF, mg = MG, nh = NH, oi = OI, pk = PK, und verbinde a, f, g, h, i, k, e, durch eine zusammenhängende krumme Linie, so muß die kleine Figur der großen ähnlich seyn.

IV. Auch könnte die geradlinige Figur ABCDE durch Hülfe der Lothe BR, ES, DF in Grund gelegt werden.

§. 324.

Zusatz. Auf ähnliche Weise läßt sich eine durchaus von unregelmäßigen krummen Linien begrenzte Figur in den Grund legen, indem man eine geradlinige in sie beschreibt, und die krummen Abweichungen durch Lothe bestimmt. Es ist sehr nützlich, mehrere Fälle dieser Art durch wirkliche Zeichnungen zu erläutern.

§. 325.

Anmerkung. Die Methode, krummlinige Figuren, in welchen man zu messen verhindert ist, z. B. einen See, einen District im Walde u. s. w. in den Grund zu legen, indem man sie von Aussen in geradlinige einschließen und sämmtliche Seiten und Winkel durch die seitherigen Meßgeräthschaften bestimmen kann, bleibt dem mündlichen

Vortrage überlassen. Dahin gehören auch jene Aufgaben, wo z. B. eine gerade Linie verlängert werden soll, obgleich undurchsichtige Zwischenkörper, z. B. Mauern oder Gebäude, im Wege stehen. Ueberhaupt wird der Lehrer diesen Vortrag durch schicklich gewählte Aufgaben sehr leicht erweitern können, wenn dieses das Bedürfniß oder der Wunsch des Schülers erforderte.

§. 326.

Anmerkung. In dem Bisherigen ist das Wesentlichste des einfachen oder niedern Feldmessens enthalten. Zu der höheren Feldmeßkunst werden besondere Werkzeuge erfordert, die nun nach ihrer Einrichtung und Anwendung kürzlich beschrieben werden sollen. Die einfachsten davon sind: der Meßtisch, der Winkelmesser oder das Astrolabium und der Transporteur.

IV. Das Messen mit künstlichern Geräthschaften.

§. 327.

Erklärung. Der Meßtisch, eine Erfindung von Johann Prätorius, der als Prof. der Mathem. zu Altdorf ums Jahr 1616 gestorben ist, besteht aus drei Stücken: dem Gestelle, dem Tischchen und der Verbindung zwischen beiden. Das Gestelle ist aus drei Füßen, deren jeder etwa vier Schuhe lang ist, zusammengesetzt. Diese sind an einem gemeinschaftlichen Brettchen so beweglich, daß dasselbe, durch ihre Verengung oder Erweiterung, höher oder tiefer gestellt werden kann. Das eigentliche Tischchen ist eine viereckige, meist quadrati-

sche, sehr wohl geebnete, hölzerne Tafel von etwa 18 bis 24 Zollen in Länge und Breite, auf welche man das Papier spannt, um die verschiedenen Linien und Winkel darauf zu zeichnen. Die Verbindung zwischen beiden bildet der Aufsatz mit dem sogenannten Nußgelenke, vermittelst dessen das Tischchen nicht nur horizontal, sondern auch vertical und schief gestellt und in jeder Lage durch eine Stellschraube befestigt werden kann.

Zum wirklichen Gebrauche des Meßtisches gehört noch 1) das Dosen-Niveau, welches als Setzwage dient zum Horizontalstellen des Tisches; 2) die Zange mit dem Lothe, um einen Punct auf dem Tischchen lothrecht über einen Punct auf dem Felde zu stellen, oder umgekehrt; endlich 3) das Diopterlineal, um von einem Puncte auf dem Felde, d. h. von einem Stabe gegen den andern zu visiren, und hierdurch eine Linie auf dem Tischchen zu ziehen, welche eben diese Richtung, wie eine andere hat, die man sich auf dem Felde von diesem einen Stabe gegen den andern vorstellt.

§. 328.

Erklärung. I. Der Winkelmesser oder das Astrolabium ist ein Werkzeug, wodurch man die Größe eines Winkels auf dem Felde unmittelbar nach Graden und Minuten bestimmen kann. Es besteht aus einem Halbkreise von Messing, der in seine Grade und Minuten getheilt, und in dessen Mittelpuncte ein Diopterlineal so angebracht ist,

daß es um denselben bewegt werden kann, wodurch die Größe der Winkel angegeben wird, welche zwischen dem hin und hergedrehten Lineale liegen. Dieses Instrument befindet sich auf einem Gestelle von drei Füßen, wie bei dem Meßtische, damit es in jede beliebige Lage gebracht werden kann.

II. Der Transporteur ist ein kleinerer oder größerer, meist aus einer dünnen Messingplatte verfertigter, in 180° Grade und in Theile von Graden genau eingetheilter Halbkreis, vermittelst dessen man einen nach Graden gegebenen Winkel auf das Papier tragen, oder umgekehrt einen auf dem Papiere gegebenen Winkel nach Graden messen kann. Die Güte dieses Werkzeugs hängt theils von der sehr scharfen Eintheilung des Halbkreises, theils davon ab, daß dasselbe eine etwas bedeutende Größe hat.

§. 329.

Anmerkung. Sehr zu wünschen ist es, daß alle angedeutete Werkzeuge entweder selbst, oder wenigstens nach guten Modellen, den Anfängern vorgezeigt werden können, indem auch die besten Erklärungen dieser Geräthschaften noch einige Undeutlichkeit zurück lassen.

§. 330.

Aufgabe. Einen Winkel auf dem Papiere zu zeichnen, welcher einem auf dem Felde gegebenen gleich ist.

Man soll den Winkel zeichnen, der entsteht, wenn man sich (Fig. 143.) aus C zwei gerade Linien nach den Gegenständen in A und in B vorstellt.

Auflösung. I. Mit dem Meßtische.

Nachdem man in die Puncte A und B Meßstangen, und in C einen Pflock gesteckt hat, stelle man das Tischchen deßg durch die Setzwage horizontal, und vermittelst des Senkbleies dergestalt über den Punct C, daß der auf demselben durch eine feine Nadel bemerkte Punct c lothrecht über C ist. Nun lege man das Diopterlineal an c, drehe es so lange, bis man durch dasselbe den Meßstab in A erblickt, und ziehe nun auf dem Tischchen, mit wohlzugespitztem Bleistifte, die Linie ac. Ferner drehe man dies Lineal so um c, daß man auch den Stab in B wahrnimmt, und ziehe die Linie bc, so ist der auf dem Tischchen entstandene Winkel acb dem auf dem Felde gegebenen Winkel ACB gleich.

II. Mit dem Winkelmesser.

Man stelle das Instrument so über den Punct C auf dem Felde, daß c lothrecht darüber liegt. Ferner bringe man es in eine horizontale Lage, visire sowohl nach A als in B und bestimme hierdurch die zwischen den beiden Schenkeln ca und cb auf dem Instrumente bemerkte Menge von Graden. Nun ziehe man eine beliebige gerade Linie aufs Papier und trage durch den Transporteur einen Winkel an

ihren Endpunct, welcher dem durch den Winkelmesser bestimmten gleich ist.

Der Beweis ist keiner Schwierigkeit unterworfen.

§. 331.

Aufgabe. Die Entfernung zweier Gegenstände auf dem Felde zu bestimmen, die nicht unmittelbar gemessen werden kann.

Von A nach B (Fig. 143.) kann man wegen eines Hindernisses nicht messen, wohl aber aus A nach C und aus B nach C. Man soll die Entfernung AB finden.

Auflösung. I. Mit dem Meßtischchen. Man stelle es horizontal mit dem Puncte c lothrecht über C, visire nach A und nach B und ziehe die ac und bc. Nun messe man die Linien AC und BC mit dem Feldmaßstabe, trage jene nach dem verjüngten Maßstabe aus c in a, diese aus c in b und ziehe die ab. Wird letztere mit dem verjüngten Maßstabe gemessen, so hält die AB eben so viele Ruthen und Fuße nach dem Feldmaße.

II. Mit dem Winkelmesser.

Nachdem man den W. ACB gemessen hat, trage man ihn durch den Transporteur aufs Papier, mache jeden Schenkel nach dem verjüngten Maßstabe dem ähnlich liegenden nach dem Feldmaße gleich und messe ihre Verbindungslinie mit dem kleinen Maße, so ist dies wieder das Maß der Linie auf dem Felde.

Beweis. Die Aehnlichkeit des kleinen und großen Dreiecks wird leicht nachgewiesen werden.

§. 332.

Anmerkung. Die Frage, welches von beiden Verfahren den Vorzug verdiene, wird der Lehrer bei dem Vortrage erörtern.

§. 333.

Aufgabe. Die Entfernung zweier Gegenstände zu finden, deren einer aus dem gewählten Standpuncte unzugänglich ist.

Aus dem Puncte C (Fig. 144.) kann man nach A und nach B visiren; aber nur nach A messen. Man soll AB bestimmen.

Auflösung. A) Durch den Meßtisch.

I. Nachdem man in A und B Meßstäbe, und in C einen Pflock angebracht hat, stelle man das Instrument wagrecht über C; so, daß c lothrecht darüber liegt, visire nach B und nach A, und ziehe die Linien cb und ca von unbestimmter Länge.

II. Man messe die CA auf dem Felde und trage sie, nach dem verjüngten Maßstabe, auf dem Tischchen von c in a.

III. Man bringe den Meßtisch aus dem Stande in C, wohin man nun einen Meßstab stecket, in jenen von A, wo man statt des Stabes einen Pflock anbringt, stelle ihn hier wagrecht und so, daß a lothrecht über A liegt. Man lege das Diopterlineal an ac, drehe das Tischchen so lange in wag-

rechter Richtung, bis man von a nach c den vorigen Standpunct C wieder erblickt, wodurch die kleine Linie ac genau in die Richtung der Linie AC fällt.

IV. Endlich visire man aus a in B und ziehe die ab so lange, bis sie die schon gezogene Linie cb in b durchschneidet, so wird diese ab, mit dem verjüngten Maßstabe gemessen, die Größe der AB nach dem Feldmaße seyn.

B) Durch den Winkelmesser.

I. Man visire in C und A die beiden Winkel ACB und BAC, und bemerke sich ihre Größe in Graden und Minuten. Desgleichen messe man die Linie AC.

II. Diese gemessene AC trage man aus a in c nach dem verjüngten Maßstabe aufs Papier, lege durch den Transporteur in a den W. acb = W. ACB, und in a den W. cab = CAB, so wird das Dreieck abc dem Dreiecke ABC ähnlich seyn, und die gemessene Linie ab das Maß von AB geben.

Der Beweis ergibt sich wieder aus der Aehnlichkeit der Dreiecke.

§. 334.

Aufgabe. Die Entfernung zweier Gegenstände zu bestimmen, unter der Voraussetzung, daß man zu keinem von ihnen gehen und messen kann.

Es sei AB (Fig. 145.) die zu bestimmende Weite, welche gefunden werden soll, ohne nach A oder nach B zu messen.

Auflösung. A) Mit dem Meßtische.

I. Man wähle eine Standlinie CD, welche eine solche Lage hat, daß man sie bequem messen, auch von C und D nach A und B visiren kann.

II. Man stelle den Tisch in horizontaler Lage über den Punct C, daß c senkrecht über C liegt, visire nach den in A, B und D befindlichen Stäben und ziehe auf dem Tischchen die willkührlich großen Linien ca, cb und cd.

III. Nun messe man die Standlinie CD, und trage sie nach dem verjüngten Maßstabe von c in d.

IV. Man stelle jetzt den Meßtisch so in D, daß d lothrecht darüber ist, und drehe ihn in horizontaler Lage so lange, bis man nach der Richtung dc den Stab C erblickt, damit die Linie dc genau über DC liege.

V. Aus d visire man nun nach den Stäben in A und in B, ziehe die Linien da und db, welche die schon auf dem Tische gezogenen ca und cb in a und in b schneiden. Mißt man nun die ab nach dem verjüngten Maßstabe, so ist die AB eben so groß nach dem Feldmaßstabe.

B) Mit dem Winkelmesser.

I. Man bringe das Instrument über C, und messe hier die Winkel ACB und BCD. Desgleichen visire man aus D die Größe der Winkel BDA und ADC. Auch messe man die Standlinie CD.

II. Man trage die Größe von CD nach dem kleinen Maßstabe auf cd, lege an c, vermittelst des Transporteurs, den W. acb = W. ACB und

W. bcd = W. BCD, desgleichen an d den W. bda = W. BDA und W. adc = ADC, so schneiden sich ca und da in a, cb und db in b, und die gemessene ab gibt wieder das Maß von AB.

§. 335.

Zusatz. Sollte die Entfernung AB (Fig. 146.), die wegen eines Hindernisses, z. B. wegen Gesträuch, Wasser, Gebäuden u. s. w. nicht unmittelbar zu messen ist, bestimmt werden, so kann eine Standlinie CD bisweilen so gewählt werden, daß man von C nach A und von D nach B nicht nur visiren, sondern auch messen kann. Wie man in diesem Falle, sowohl durch den Meßtisch als durch den Winkelmesser, die Entfernung AB finden kann, wird jeder Nachdenkende sogleich finden.

§. 336.

Aufgabe. Die Entfernung zweier Gegenstände zu messen, zu deren einem man nur kommen kann, ohne den Meßtisch aus dem ersten Stande zu verrücken.

Man soll die Entfernung AB (Fig. 147.) aus dem einzigen Standorte C messen.

Auflösung. I. Man setze den Meßtisch gehörig über C, visire nach B und nach A, ziehe cb und ca willkührlich, und trage die gemessene CA gehörig aus c in a.

II. In CA nehme man einen beliebigen Punct D, und zwischen D und B einen ähnlichen Punct E, visire aus C in E, und ziehe die ce willkührlich.

III. Man messe die CD und CE, trage sie aus c in d, und aus c in e, ziehe die de, bis sie in ihrer Verlängerung die cb in b schneidet, und verbinde a und b durch ab, so ist ab das Maß von AB.

Der Beweis ergiebt sich leicht aus den ähnlichen Dreiecken.

§. 337.

Anmerkung. Wie man die vorige Aufgabe durch den Winkelmesser auflösen könne, wird man aus dem Bisherigen leicht finden.

§. 338.

Aufgabe. Die Weite zweier Gegenstände, zu deren keinem man kommen kann, durch Hülfe des Meßtisches aus einem Standpuncte zu messen.

Es sei AB (Fig. 148.) die zu messende Weite. Man soll sie finden, ohne das Tischchen aus dem Stande C zu verrücken.

Auflösung. I. Man visire aus c in A, in B und in D, ziehe die ca, cb und cd unbestimmt, messe CD und trage sie aus c in d.

II. Nun stecke man in gerader Richtung mit B und D, z. B. in E, einen Stab, visire aus c in

E, messe CE, trage sie aus c in e, und ziehe die de, bis sie verlängert die cb in b schneidet.

III. Nachdem man in F, dem Dürchschnittspuncte von DA und CE, einen Stab gesteckt hat, messe man CF, trage ihr Maß aus c in f, ziehe df, bis sie verlängert die ca in a schneidet, und verbinde nun a und b durch ab, so ist wieder das Maß von ab dem Maße von AB gleich.

Der Beweis fließt wieder aus der Aehnlichkeit der Dreiecke.

§. 339.

Anmerkung. Auch diese Aufgabe läßt sich durch den Winkelmesser auflösen.

§. 340.

Anmerkung. Die zwei letzten Aufgaben sind Beispiele von dem Feldmessen aus einem Stande. Es gewährt den Vortheil, daß der Meßtisch unverrückt bleibt, wodurch immer kleinere oder größere Fehler vermieden werden.

§. 341.

Aufgabe. Eine Figur durch Hülfe des Meßtisches aus einem innerhalb derselben angenommenen Standpunct in den Grund zu legen; vorausgesetzt, daß man von demselben nach allen Winkelpuncten der Figur visiren und messen kann.

Die Figur ABCDEFG (Fig. 149.) soll aus dem Standpuncte H in den Grund gelegt werden, der

so liegt, daß man aus ihm nach allen Grenzpuncten sehen und messen kann.

Auflösung. I. Man setze den Meßtisch gehörig über H, visire aus h nach allen in A, B, C, D, E, F, G befindlichen Stäben, und ziehe auf dem Tischchen die Linien ha, hb, hc u. s. f. von unbestimmter Größe.

II. Man messe die HA, HB, HC u. s. w., trage sie aus h in a, in b, in c u. s. f. und ziehe ab, bc, cd u. s. f., so ist die Figur abcdefg der großen ähnlich.

Der Beweis ist leicht.

§. 342.

Anmerkung. Auch durch den Winkelmesser kann diese Aufgabe, wie man leicht findet, aufgelößt werden.

§. 343.

Aufgabe. Eine Figur in den Grund zu legen, wovon man alle Grenzlinien und deren Winkel messen kann.

Es sei ABCDEF (Fig. 150.) die gegebene Figur, von welcher alle Seiten und Winkel bestimmt werden können.

Auflösung. I. Man stelle den Meßtisch über E, visire nach F und D, messe EF und ED und trage sie aus e in f, aus e in d.

II. Man setze den Tisch mit dem Puncte d über D; so, daß man über de zurück nach E sieht, visire nach C, messe DC und trage sie aus d in c.

III. Man bringe den Meßtisch mit c über C; so, daß man über die cd zurück in D sieht, visire nach B, messe CB und trage sie aus c in b.

IV. Auf ähnliche Weise fahre man für die übrigen Standpuncte fort, so bekömmt man für jeden neuen Winkelpunct einen größern Theil der Figur auf dem Meßtische. Der Standpunct C z. B. gibt den Theil fedcb. In dem Standpuncte B visire man, nachdem der Meßtisch gehörig gestellt ist, nach A, messe BA, trage sie aus b in a und ziehe die af, so ist abcdef und ABCDEF ähnlich, wobei man sich die Mühe, den Meßtisch über A zu stellen, ersparen kann. Doch ist die Probe nicht überflüßig, zu untersuchen, ob AF und af einerlei Maß haben.

Der Beweis gründet sich auf bekannte Sätze von der Aehnlichkeit der Figuren.

§. 344.

Anmerkung. Auch diese Aufgabe kann durch den Winkelmesser aufgelößt werden.

§. 345.

Aufgabe. Eine Figur, an welcher man nur eine Grenzlinie als Standlinie messen kann, durch den Meßtisch in den Grund zu legen.

Es sei (Fig. 151.) ABCDEF das gegebene Feld, welches aus den zwei Standpuncten E und D aufgenommen werden soll.

Auflösung. I. Nachdem man den Meßtisch über E gestellt hat, visire man nach E, A, B, C und D, ziehe aus e auf dem Tischchen die zugehörigen Linien von unbestimmter Größe, messe ED, und trage sie verjüngt aus e in d.

II. Nun stelle man das Tischchen mit d über D; so, daß de über DE liegt, visire aus d nach F, A, B, C, so werden diese Visirlinien die vorhin aus e gezogenen in den Puncten f, a, b und c schneiden. Zieht man nun ef, fa, ab und bc, so ist efabcd ähnlich EFABCD.

Den Beweis wird man leicht finden.

§. 346.

Anmerkung. Daß auch diese Aufgabe durch den Winkelmesser aufgelößt werden kann, bedarf kaum einer Erinnerung.

§. 347.

Anmerkung. Wenn die aufzunehmden Figuren zum Theil von krummen Linien eingeschlossen sind, so werden diese von innen oder aussen durch gerade Linien begrenzt und die krummen Abweichungen durch die oben erklärte Perpendikelmethode bestimmt. Auch kann die gerade Linie öfters sehr zweckmäßig so gezogen werden, daß Stücke der krummen Linie zu ihren beiden Seiten liegen. Beispiele an wirklichen Zeichnungen solcher Figuren dienen hier sehr zur Erläuterung.

§. 348.

Aufgabe. Eine in den Grund gelegte Figur auszurechnen.

Es sei (Fig. 142.) ABCDEKIHGF der Grundriß des auszumessenden Feldes.

Auflösung. I. Man ziehe AE und von B, C und D die Lothe BR, CS und DT, so kann man die Dreiecke ABR und TDE, so wie auch die Paralleltrapeze RBCS und SCDT leicht ausrechnen, deren Summe den Theil ABCDEA der Figur bildet.

II. Nimmt man nun in der krummen Linie AHIE, die Puncte F, G, H, I und K so, daß die dazwischen liegenden Stücke ohne bedeutenden Fehler für gerade gehalten werden können, und zieht die Lothe FL, GM, HN, IO und KP, so zerfällt dieser Theil der Fläche in zwei rechtwinkelige Dreiecke und in vier Paralleltrapeze. Diese einzeln ausgerechnet, und ihre Summe zu der vorhin (in I.) gefundenen addirt, gibt den Flächeninhalt des ganzen Feldes.

Der Beweis ergibt sich aus der Lehre von der Berechnung des Inhaltes ebener Figuren.

§. 349.

Anmerkung. Der Lehrer kann die vorige Aufgabe an andern Zeichnungen dem Schüler erläutern, damit sein geometrischer Scharfsinn hierdurch mehrfach gebildet werde.

§. 350.

Anmerkung. Bisweilen kann auch der Inhalt einer Figur sogleich auf dem Felde, durch Hülfe der einfachen Meßgeräthschaften, gefunden werden, ohne daß man nöthig hat, dieselbe zuerst in den Grund zu legen. Dies ist häufig bei kleinern Grundstücken der Fall, welche durch schickliche

Diagonallinien in lauter Dreiecke getheilt werden können. Sehr nützlich für die practische Geometrie ist hier die Aufgabe: Aus den drei gemessenen Seiten eines Dreiecks unmittelbar seinen Inhalt zu berechnen, weil hierbei manche Fehler vermieden werden. Ihre Auflösung soll unten beigebracht und erwiesen werden.

§. 351.

Aufgabe. Eine auf dem Papiere gezeichnete Figur nach dem großen Maßstabe auf dem Felde abzustecken.

Auflösung und Beweis ergeben sich leicht aus dem Bisherigen.

§. 352.

Aufgabe. Ein gegebenes Feld in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung. I. Man berechne den Inhalt der ganzen Figur und dividire ihn durch die Zahl der zu findenden gleichen Theile, so findet man die Größe eines dieser Theile.

II. Man schneide von der Figur ein Stück ab, welches nach dem Augenmaße dem zu findenden Theile ungefähr gleich ist, berechne seinen Inhalt und bestimme hierdurch, wie viel es zu groß oder zu klein sei. Im ersten Falle muß das gehörige Stückchen abgeschnitten, im zweiten zugesetzt werden.

III. Dieses Stückchen kann als ein Dreieck betrachtet werden, dessen Grundlinie die (in II. gezogene) Scheidelinie; dessen Höhe aber noch zu finden ist.

Dividirt man daher mit der Grenzlinie in den Inhalt des Stückchens, so ist der Quotient die halbe Höhe des zu findenden Dreiecks, welches hierdurch leicht verzeichnet werden kann.

IV. Das weitere Verfahren, nebst Berechnung wirklicher Beispiele, wird dem mündlichen Vortrage des Lehrers und der practischen Ueoung der Schüler überlassen. Bei dem wirllichen Theilen eines solchen Grundstücks, z. B. einer gemeinheitlichen, gemeinschaftlich benützten Wiese in soviele gleiche Theile, als es Gemeindeglieder sind, muß der Geometer mancherlei Real- und Personalverhältnisse berücksichtigen.

§. 353.

Anmerkung. Auch kann jedes Feld in verhältnißmäßige Theile eingetheilt werden, wozu die Anweisung nicht schwer zu finden ist. Wirkliche Beispiele müssen auch dieses erläutern.

V. Etwas vom Höhenmessen.

§. 354.

Aufgabe. Die Höhe eines Gegenstandes aus einem Standpuncte zu messen, aus welchem man zu jenem Puncte kommen kann, der lothrecht unter jener Höhe liegt.

Es sei (Fig. 152.) BD die zu messende Höhe, wobei man annimmt, daß aus A nach D, dem

Puncte, welcher lothrecht unter B liegt, gemessen werden kann.

Auflösung. I. Man stelle das Instrument so, daß die Fläche des Tischchens mn lothrecht stehe, was durch Hülfe eines Senkbleies geschieht, und bestimme den Punct a, der senkrecht über A liegt.

II. Aus a visire man horizontal nach ac in C, und aus eben diesem Puncte nach ab in B.

III. Nun messe man AD, trage das Maß aus a in c, errichte hier das Loth cb, welches die ab in b schneidet, so ist das Maß von cb jenem von CB gleich.

IV. Setzt man zu der gefundenen BC noch CD = aA, so erhält man die Größe von BD.

Der Beweis folgt wieder aus der Aehnlichkeit.

§. 355.

Aufgabe. Die Höhe eines Gegenstandes aus zwei Standpuncten, deren Entfernung man bestimmen kann, zu messen.

Es sei (Fig. 153.) AB die zu messende Höhe, welche aus den Standorten C und D gefunden werden soll.

Auflösung. I. Man stelle den Meßtisch in verticaler Richtung so in C, daß c lothrecht darüber liegt, visire horizontal in F und A, und ziehe die ce und ca willkührlich.

II. Man setze den Tisch so in D, daß B, C und D in gerader Linie liegen, messe CD, trage sie aus c in

d, und stelle das Tischchen dergestalt, daß die verlängerte dc in den Punct F eintrifft.

III. Aus d visire man in A und ziehe die da, bis sie die ca in a schneidet. Endlich ziehe man aus a das Loth af auf de, so ist dieses die Höhe AF nach dem kleinen Maßstabe, wozu noch die Höhe dD = cC = FB gesetzt wird, um die gesuchte Höhe AB zu bekommen.

Auch dieser Beweis ergibt sich leicht aus den ähnlichen Dreiecken.

§. 356.

Anmerkung. Es ist klar, daß die zwei letzteren Aufgaben auch vermittelst des Winkelmessers aufgelöset werden können, wie man leicht von selbst finden wird.

§. 357.

Anmerkung. Wie man eine gegebene Höhe

I. Durch Hülfe eines Stabes, in dessen obern Spalte sich ein bewegliches Lineal befindet,

II. Durch Messung des Schattens,

III. Durch Hülfe eines Spiegels,

IV. Aus zwei übereinanderstehenden Fenstern eines hohen Gebäudes,

V. Durch verschiedene sogenannte Höhenmesser finden kann, wird der Lehrer in den Vorlesungen zeigen.

§. 358.

Anmerkung. I. Dahin gehört auch die Aufgabe: die senkrechte Höhe eines kleinen Berges durch einfache Meßin-

strumente zu finden. Auch bringe der Lehrer dem Schüler den Begriff und Gebrauch der Wasserwage und des Nivellirens (Wasserwägens) bei.

11. Da diese practische Elementar-Geometrie nur die allgemeinsten Anwendungen der Theorie auf die Praxis lehren sollte, so kann sie nunmehr abgeschlossen werden.

Der
geometrischen Wissenschaftslehre
vierter Cursus.

Elementar-Trigonometrie.

Elementar-Trigonometrie.

I. Vorbereitungslehren vom Ausziehen der Quadratwurzel.

§. 359.

Erklärung. I. Das Product einer Zahl in sich selbst wird ihr Quadrat, und jene Zahl die Wurzel des Quadrats oder Quadratwurzel genennt. So ist $6 \times 6 = 36$ das Quadrat von 6, und 6 die Quadratwurzel von 36. Zur Bezeichnung des Quadrats einer Zahl schreibt man eine kleine Ziffer 2 zur Rechten etwas in die Höhe. So ist $8^2 = 8 \times 8 = 64$. Der Name Quadrat ist aus der Geometrie in die Arithmetik übertragen worden, weil man (§. 237.) den Inhalt eines Quadrates findet, wenn das Maß seiner Seite einmal mit sich selbst multiplicirt wird.

II. Aus einer gegebenen Zahl die Quadratwurzel ziehen, heißt eine Zahl finden, welche, einmal mit sich selbst multiplicirt, die gegebene hervorbringt. Das Zeichen dafür ist $\surd$. So heißt z. B. $\surd\ 49$ so viel, als die Quadratwurzel aus 49, welche 7 ist, und es ist $\surd\ 100 = 10$, $\surd\ 144 = 12$ u. s. w.

III. Die Wurzel heißt eintheilig, wenn sie aus bloßen Einern; zweitheilig, wenn sie aus Einern und Zehnern; dreitheilig, wenn sie aus Einern, Zehnern und Hunderten besteht u. s. f. Die höchste Ziffer der Wurzel heißt der erste Theil, die darauf folgende der zweite Theil u. s. f.

§. 360.

Zusatz. Die Quadrate aller eintheiligen Wurzeln befinden sich in dem Einmaleins und sind der Reihe nach: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, u. 81.

§. 361.

Lehrsatz. Das Quadrat jeder zweitheiligen Wurzel besteht aus drei Stücken:

I. Aus dem Quadrate des Zehners, oder des ersten Theils;

II. Aus einem zweifachen Producte des Zehners in den Einer, oder des ersten Theils in den zweiten, und

III. Aus dem Quadrate des Einers, oder des zweiten Theils.

Beweis. Es sei 48 die gegebene zweitheilige Wurzel, so ist der erste Theil 40, der zweite 8; folglich $48 \times 48 = (40 + 8) \times (40 + 8)$, welches folgende Rechnung gibt:

$$\begin{array}{l} 40 + 8 \\ 40 + 8 \\ \hline 40 \times 40 = 1600 = \text{dem Quadrate des I. Theils.} \\ 40 \times 8 = 320 = \text{dem Prod. d. I. Th. i. d. II. Th.} \\ 8 \times 40 = 320 = \text{dem Prod. d. I. Th. i. d. II. Th.} \\ 8 \times 8 = 64 = \text{dem Quadr. des II. Theils.} \\ \hline \end{array}$$

folglich $2304 = 40^2 + 2 \times 40 \times 8 + 8^2$.

Die gewöhnliche Multiplicationsrechnung stimmt vollkommen damit überein, denn es gibt

$$\begin{array}{r} 48 \text{ multiplicirt} \\ \text{mit } 48 \\ \hline 384 \\ 192 \\ \hline \end{array}$$

das Product 2304, wie vorhin.

§. 362.

Anmerkung. Dieser wichtige Satz kann durch geometrische Zerlegung eines Quadrats sehr anschaulich gemacht werden, wie Fig. 176. lehrt. Wenn nämlich die Seite AB des Quadrates ABCD in zwei Theile AE + EB zerlegt wird, so besteht dasselbe, wenn EG mit BC und FH (in der Entfernung CF = EB) mit CD gleichlaufend gezogen wird, aus dem Quadrate des ersten Theils, oder AEIH, aus dem doppelten Producte des ersten Theiles in den zweiten, EBFI und IGDH, und endlich aus dem Quadrate des zweiten Theils, oder IFCG.

§. 363.

Zusatz. I. Das Quadrat des ersten Theils muß seine niedrigste Stelle in den Hunderten haben.

Seine höchste kann in die Tausende reichen, da 90 × 90 = 8100.

II. Das doppelte Product muß seine niedrigste Stelle in den Zehnern haben. Seine höchste Stelle kann auch in die Tausende gehen, da 2 × 90 × 9 = 2 × 810 = 1620.

III. Das Quadrat des zweiten Theils muß seine niedrigste Stelle in den Einern, und kann seine höchste in den Zehnern haben, da schon 4 × 4 = 16 ist.

§. 364.

Zusatz. Jede Zahl, welche aus drei oder vier Ziffern besteht, muß eine zweitheilige Quadratwurzel haben. Denn jede eintheilige Wurzel ist viel zu klein; die kleinste dreitheilige aber, d. h. 100, schon zu groß, da 100 × 100 = 10000.

§. 365.

Zusatz. Wenn man daher eine drei- oder vierzifferige Zahl von der Rechten zur Linken in zwei Classen theilt, und der ersten Classe zwei Ziffer gibt, so liegt in der linken Classe das Quadrat des ersten Wurzeltheils, und vielleicht noch etwas vom doppelten Producte. In der höchsten Ziffer der rechten Classe ist der Anfang des doppelten Products, und in der folgenden Ziffer dieser Classe der Anfang des Quadrats vom zweiten Theile enthalten.

§. 366.

Aufgabe. Aus jeder drei- oder vierzifferigen Zahl die Quadratwurzel zu finden.

Auflösung. I. Man theile die Zahl von der Rechten gegen die Linke in Classen; so, daß die erste Classe zwei Ziffer enthält.

II. Man suche das größte Quadrat, welches von der linken Classe abgezogen werden kann, und subtrahire es wirklich davon. Die Wurzel dieses Quadrats ist der erste zu findende Wurzeltheil.

III. Der Rest in II (wenn einer bleibt) ist Dasjenige, was das doppelte Product in die linke Classe gebracht hat. Nimmt man zu ihm die nächste Ziffer der gegebenen Zahl herunter, so enthalten beide Ziffer das doppelte Product aus dem ersten Theil in den zweiten.

IV. Dividirt man nun mit dem doppelten ersten Wurzeltheile in diese Zahl, so muß der Quotient der zweite Theil der Wurzel seyn. Man bilde nun das doppelte Product und ziehe es ab.

V. Zu dem etwaigen Reste in IV. setze man die letzte Ziffer der Quadratzahl, so müssen diese zwei Ziffer das Quadrat des zweiten Theils enthalten. Bildet man daher dieses Quadrat, so ist es entweder jener Zahl gleich, oder größer oder kleiner. Im ersten Falle ist die gegebene Zahl ein **vollkommenes** Quadrat, und die gefundene Wurzel ihre genaue Wurzel.

VI. Im zweiten Falle von V. muß man den Quotienten in IV. um eins verringern, dann wieder nach IV. und V. verfahren, bis das Quadrat des neuen zweiten Theils von der Zahl in V. abgezogen werden kann.

Im dritten Falle von V. ist die gefundene Wurzel diejenige, deren Quadrat der gegebenen Zahl am nächsten kömmt, und der gebliebene Rest zeigt an, um wie viel diese Zahl größer als das Quadrat der gefundenen Wurzel ist. Wenn man daher diese Wurzel quadrirt, und den Rest dazu addirt, so muß die gegebene Zahl herauskommen.

Der Beweis davon beruht unmittelbar auf den vorhergehenden §§.

		Wurzeltheile.
		I. II.
Beispiele. I) $\sqrt{5|76}$		2 4
Quadrat des I. Theils	4	
das doppelte Prod. steckt in	17	
der doppelte I. Wurzeltheil	(4)	
dopp. Product aus I. in II.	16	
	16	
Quadrat des II. Theils	16	
	00	

Folglich ist $\sqrt{576} = 24$. Die Probe wird gemacht, wenn man das Product 24×24 wirklich rechnet, welches $= 576$ ist.

		Wurzeltheile.
		I. II.
II) $\sqrt{14|44}$		3 8
Quadrat des I. Theils	9	
	54	
Der doppelte I. Theil	(6)	
Dopp. Prod. aus I. in II.	48	
	64	
Quadrat des II. Theils	64	
	00	

Obgleich hier der doppelte erste Wurzeltheil 6 in 54 gerade 9mal enthalten ist, so sieht man doch leicht, daß wegen des noch abzuziehenden Quadrats vom II. Theile nur 8 in den Quotienten kommen darf. — Die Probe ist, daß $38 \times 38 = 1444$.

	Wurzeltheile.
	I. II.
III) $\sqrt{35|68}$	59
25	59
106	531
(10)	295
90	$3481 = 59^2$
168	
81	87 R. ad.
Rest 87)	3568 probe.

	Wurzeltheile.
	I. II.
IV) $\sqrt{85|96}$	92
81	92
49	184
(18)	828
36	$8464 = 92^2$
136	132 R. ad.
4	8596 probe.
Rest 132	

Obgleich in dem Beispiele IV. ein großer Rest bleibt, so berechtigt dies doch nicht, den II. Wurzeltheil auch nur um eine Einheit zu vergrößern. Denn $93 \times 93 = 8649 > 8596$.

§. 367.

Aufgabe. Die Theile zu finden, welche in den Quadraten mehrtheiliger Wurzeln enthalten sind.

Auflösung. I. Es sei 348 die gegebene **dreitheilige** Wurzel, so ist $348 = 300 + 40 + 8$. Man kann diese in eine zweitheilige verwandeln, wenn man $348 = (300 + 40) + 8$ setzt, und nun $(300 + 40)$ als den ersten, 8 als den zweiten Wurzeltheil ansieht. Allein $((300 + 40) + 8)^2 = (300 + 40)^2 + 2 \times (300 + 40) \times 8 + 8^2$. Ferner ist $(300 + 40)^2 = 300^2 + 2 \times 300 \times 40 + 40^2$. (§. 361.) Daher wird $348^2 = 300^2 + 2 \times 300 \times 40 + 40^2 + 2 \times (300 + 40) \times 8 + 8^2$.

Dies mit Worten ausgedrückt, heißt: das Quadrat einer dreitheiligen Wurzel besteht 1) aus dem Quadrat des ersten Theils; 2) aus einem doppelten Producte des ersten Theils in den zweiten; 3) aus dem Quadrate des zweiten Theils; 4) aus einem doppelten Producte des ersten und zweiten Theils in den dritten und 5) aus dem Quadrate des dritten Theils.

II. Für eine mehrtheilige Wurzel, z. B. 4676 setze man $4675 = 4670 + 5$, wo jene Zahl den ersten, diese den zweiten Theil vorstellt. Daher ist $(4670 + 5)^2 = 4670^2 + 2 \times 4670 \times 5 + 5^2$, oder $= 4670^2 + 2 \times (4000 + 600 + 70) \times 5 + 5^2$. Wenn also die dreitheilige Wurzel zur viertheiligen

wird, so kommen zu den Theilen, woraus das Quadrat der dreitheiligen besteht, noch zwei Stücke, um das Quadrat der viertheiligen zu bilden; nämlich ein doppeltes Product aus der Summe der drei vorhergehenden Wurzeltheile in den vierten, und dann ein Quadrat des vierten Theils.

III. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens findet man folgendes allgemeine Gesetz:

A) Das Quadrat jeder mehrtheiligen Wurzel enthält, der Ordnung nach, die Quadrate aller Wurzeltheile.

B) Zwischen zwei unmittelbar auf einanderfolgenden Quadraten liegt immer ein doppeltes Product aus der Summe aller vorhergehenden Wurzeltheile in den neuen.

§. 368.

Anmerkung. Auch die Theile, woraus die Quadrate mehrtheiliger Wurzeln bestehen, lassen sich durch geometrische Construction darstellen, wie man nun (nach §. 362.) wohl selbst finden wird.

§. 369.

Zusatz. Alle diese in dem Quadrate einer mehrtheiligen Wurzel enthaltene einzelne Stücke fangen mit ihren niedrigsten Ziffern in den unmittelbar aufeinander folgenden Decimal-Stellen an. Die Wahrheit dieses Satzes kann leicht an den Quadraten mehrtheiliger Wurzeln nachgewiesen werden.

§. 370.

Aufgabe. Wenn eine Zahl von mehr als vier Ziffern gegeben ist, zu bestimmen, wie vieltheilig ihrer Quadratwurzel ist.

Auflösung. Wenn die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Classen getheilt wird, und jede Classe zwei Ziffer erhält, so hat ihre Wurzel so viele Theile, als es Classen gibt, wenn gleich die linke Classe nur eine Ziffer enthält.

Beweis. I. Wenn die gegebene Zahl fünf oder sechs Ziffer hat, so ist ihre Wurzel dreitheilig; denn sie kann weder zwei= noch viertheilig seyn, indem $99 \times 99 = 9801$ als Quadrat zu klein, und $1000 \times 1000 = 1000000$ als Quadrat zu groß ist.

II. Die Wurzel jeder sieben= oder achtzifferigen Zahl muß viertheilig seyn; denn $999 \times 999 = 998001$ ist als Quadrat zu klein, und $10000 \times 10000 = 100000000$ als Quadrat zu groß.

III. So kann dieser Beweis für alle höhere Zahlen fortgesetzt werden.

§. 371.

Aufgabe. Aus jeder gegebenen Zahl die Quadratwurzel zu finden.

Auflösung. Diese ist der oben (§. 366) vorgetragenen ganz ähnlich und wird durch folgende Beispiele erläutert:

Beispiele. I) √ 73|44|49 — Wurzeltheile: I. II. III. = 8 5 7

Quadrat des I. Theils	64
	94
Doppelter I. Theil	(16)
Dopp. Prod. aus. I. in II.	80
	144
Quadrat des II. Theils	25
	2194
Doppelter I. u. II. Theil	(170)
D. Prod. aus I. u. II. III.	1190
	49
Quadrat des III. Theils	49
	00

Probe: 857 × 857 = 734449

II) √ 78|54|73|92 — Wurzeltheile. I. II. III. IV. = 8 8 6 2

64	. . . . . . Quadrat des I. Theils
145	
(16)	. . . . . Doppelter I. Theil
128	. . . . . Dopp. Prod. aus I. in II.
174	
64	. . . . . Quadrat des II. Theils
1107	
(176)	. . . . Doppelter I. u. II. Theil
1056	. . . . Doppeltes Prod. aus I. u. II. in III.
513	

	36	Quadrat des III. Theils
	4779	
	(1772) . . .	Dopp. I. II. u. III. Theil
	3544 . . .	Dopp. Prod. aus I. u. II.
	12352	u. III. in IV.
	4 . . .	Quadrat des IV. Theils
Rest	12348	

Probe. Die wirkliche Rechnung lehrt, daß (8862 × 8862) + 12348 = 78547392 ist.

Mehrere Beispiele werden dem Anfänger in dieser Rechnung leicht die nöthige Fertigkeit erwerben.

§. 372.

Erklärung. Nicht jede gegebene Zahl hat eine genau anzugebende Quadratwurzel; denn wenn man zwischen zwei willkührlichen Quadratzahlen, z. B. zwischen den vollkommenen Quadraten 25 und 36 eine beliebige Zahl, z. B. 32 annimmt, so ist klar, daß $\sqrt{32}$ größer als 5, und kleiner als 6 sei. Wäre also $\sqrt{32}$ eine genau bestimmbare Zahl, so müßte sie ausser 5 noch Bruchtheile enthalten, und die Wurzel wäre eine aus einer ganzen Zahl und aus Bruchtheilen bestehende gemischte Zahl; welche, zum Quadrate erhoben, die gegebene hervorbringen müßte. Da aber das Quadrat dieser Bruchtheile immer wieder aus Bruchtheilen besteht, so kann nie die ganze Zahl 32 daraus entstehen. Daher ist $\sqrt{32}$ nicht vollkommen genau in Bruchtheilen anzugeben. Solche nicht genaue angebbare Quadratwurzeln heissen Irrational-Zahlen,

und die Methode, ihren Werth so genau als man will zu finden, wird die Ausziehung der Quadratwurzel durch Annäherung genennt.

§. 373.

Zusatz. Da $\sqrt{100} = 10$; $\sqrt{10000} = 100$; $\sqrt{1000000} = 1000$ u. s. f. ist, so folget, daß, wenn ein Quadrat 100 mal, 10000 mal, 1000000 mal u. s. w. größer gemacht wird, seine Wurzel hierdurch 10 mal, 100 mal, 1000 mal u. s. f. größer werde.

Hat man daher die Wurzeln solcher 100, 10000, 1000000 mal vergrößerten Qudratzahlen gefunden, so darf man dieselbe nur wieder 10, 100, 1000 mal kleiner machen, um die richtigen Quadratwurzeln jener ursprünglichen Zahlen zu erhalten.

Demnach ist z. B. $\sqrt{7} = \frac{\sqrt{700}}{10} =$

$$\frac{\sqrt{70000}}{100} = \frac{\sqrt{7000000}}{1000} = \frac{\sqrt{700000000}}{10000}$$

§. 374.

Zusatz. Auf diese Betrachtung, und auf die allgemeinen Regeln für das Wurzelausziehen, gründet sich das Ausziehen der Quadratwurzeln durch Annäherung, was nun aus folgenden Beispielen deutlicher wird, als durch viele Worte. — Die allgemeine Regel heißt: Man hänge an die gegebene Zahl so viele Paare von

Nullen, als auf wie viele Decimalbruchstellen die Wurzel gefunden werden soll.

Wurzeltheile.

Beispiele. I) √ 8|00|00|00|00 (28284

4
4 | 40
32
80
64
56 | 160
112
480
4
564 | 4760
4512
2480
64
5656 | 24160
22624
15360
16
15344 Rest.

Daher ist $\sqrt{8} = \frac{28284}{10000} = 2{,}8284$.

Probe. Hier ist wieder
$(2{,}8284 \times 2{,}8284) + 15344 = 8$.

II. Auf ähnliche Weise findet man

$$\sqrt{127} = \sqrt{\frac{1270000000000}{100000}} = \frac{1126942}{100000} =$$

11,26945, nebst dem Reste 1728636.

Probe. Man findet wieder
(11,26942 × 11,26942) + 1728636 = 127.

Auch in diesen Näherungsrechnungen ist den Anfängern eine anhaltende Uebung zu empfehlen, damit ihnen die Theorie klar und die Praxis geläufig werde.

§. 374. *a*.

Anmerkung. Nach diesen Vorbereitungen ist es dem Lehrer leicht, die Ausziehung der Quadratwurzeln aus gemeinen Brüchen, und aus Decimalbrüchen mit dem Vorigen zu verbinden.

II. Geometrische Anwendungen vom Wurzelausziehen.

§. 375.

Aufgabe. In dem rechtwinkeligen Dreiecke aus zwei, in Maßtheilen gegebenen Seiten die dritte Seite durch Rechnung zu finden.

Auflösung. Nennt man die erste Cathete a, die zweite b und die Hypotenuse c, so werden die möglichen drei Fälle auf folgende Weise aufgelößt:

I. $\sqrt{(a^2 + b^2)} = c$

II. $\sqrt{(c^2 - a^2)} = b$ und

III. $\sqrt{(c^2 - b^2)} = a$.

Beispiele. Zu I. Für $a = 3'$, $b = 4'$, wird $c = \sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{25} = 5'$. — Wenn man daher aus den beiden Endpuncten einer gege-

benen geraden Linie = 5′ mit zwei Halbmessern = 3′ und = 4′ über einerlei Seite jener Linie zwei sich durchschneidende Kreisbogen beschreibt, und diesen Durchschnittspunct mit ihren beiden Endpuncten geradlinig verbindet, so bilden diese unter sich einen rechten Winkel. Auch kann diese, öfters sehr bequeme Construction über der einen Cathete mit der Hypotenuse und der andern Cathete ausgeführt werden.

Zu II. Für c = 12′ und a = 8′ wird
$b = \surd\,(144 - 64) = \surd\,80 = 8',9442719 \ldots$
Für c = 36′, a = 20, findet man
$b = \surd\,(1296 - 400) = \surd\,896 = 29',9332591.$

Zu III. Desgleichen wird für c = 14″ 8‴ und b = 10′ 5′ die Cathete
$a = \surd\,(148 \times 148 - 105 \times 105) = \surd\,(21904 - 11025) = \surd\,10879 = 104,3 = 10' \; 4'' \; 3'''$ u. s. f.

§. 376.

Aufgabe. Figuren, deren Flächeninhalt gefunden werden kann, durch Rechnung in gleich große Quadrate zu verwandeln.

Auflösung. Man ziehe aus dem berechneten Inhalte dieser Figuren die Quadratwurzel, so ist diese das Maß der Seite des zu findenden Quadrates. Man bemerke zur Erläuterung folgende Fälle:

I. Ein gegebenes Dreieck in ein ihm gleiches Quadrat zu verwandeln.

Es sei des Dreiecks gemessene Höhe $= h$, seine Grundlinie $= g$, das Maß der Seite des seinem Inhalte gleichen Quadrats $= s$, so ist $s = \sqrt{\frac{h \times g.}{2}}$ — Wäre z. B. $h = 24°$ $g = 38°$, so hätte man $s = \sqrt{\frac{24 \times 38}{2}} = \sqrt{456} = 21° \; 3' \; 5''$. Um dieses Quadrat zu construiren, könnte man nun, durch Hülfe des verjüngten Maßstabes, diese $21° \; 3' \; 5''$ in den Cirkel fassen und über diese Linie ein Quadrat beschreiben.

II. Ein Parallelogramm in ein ihm gleiches Quadrat zu verwandeln. Das Maß der senkrechten Höhe dieses Parallelogramms sei h, und jenes seiner Grundlinie sei g, so ist hier $s = \sqrt{h \times g}$. Für $h = 15°$ und $g = 84°$ wird $s = \sqrt{15 \times 84} = \sqrt{1260} = 35° \; 4' \; 9''$.

III. Einen Kreis, dessen Durchmesser in bekannten Maßtheilen gegeben ist, in ein ihm gleiches Quadrat zu verwandeln.

Es sei der Durchmesser $= d$, die zu findende Fläche $= F$, so ist $1000 : 785 = d^2 : F$ (§. 269.) folglich $F = \frac{785 \times d^2}{1000}$, und daher die Seite des zu findenden Quadrates, oder $s = \sqrt{\frac{785 \times d^2.}{1000}}$ — Wäre nun z. B. $d = 10°$, so hätte man

$$8 = \sqrt{\frac{785 \times 100}{1000}} = \sqrt{\frac{785}{10}} = \sqrt{\frac{7850}{010}}$$

$$= \frac{\sqrt{7850}}{10} = \frac{891}{10} = 8^\circ\ 9'\ 1''$$

§. 377.

Aufgabe. Der Flächeninhalt eines Kreises in Quadratmaß ist gegeben; man soll die Größe seines Durchmessers in Längemaß finden.

Auflösung und Erläuterung. Es sei der gegebene Flächeninhalt des Kreises, oder $F = 348^{\square 0}$. Wie groß ist sein Durchmesser? — Da $100 : 785 = D^2 : F$; so hat man $1000 : 785 = D^2 : 348$; folglich

$$D^2 = \frac{348 \times 1000}{785} = \frac{348000}{785} = 433,32 \text{ und}$$

$$D = \sqrt{443,32} = \sqrt{\frac{44332}{100}} =$$

$$\frac{\sqrt{44332}}{10} = \frac{210,5}{10} = 21,05 = 21^\circ\ 5''$$

Es ist den Anfängern zu rathen, mehrere solche Beispiele durchzurechnen.

§. 378.

Aufgabe. Der Flächeninhalt eines Quadrats ist in Zahlen gegeben. Man soll die Größe der Seite eines andern Quadrates

finden, welches mit dem gegebenen in irgend einem bestimmten Verhältnisse steht.

Auflösung. Sie ergibt sich am Deutlichsten aus folgenden einzelnen Beispielen:

I. Das gegebene Quadrat betrage 64 Quadratruthen. Wie groß ist die Seite des fünfmal so großen Quadrates?

Hier wird $s = \sqrt{5 \times 64} = \sqrt{320} = 17^\circ\ 8'\ 8''$.

II. Das gegebene Quadrat sey 138°. Wie groß ist die Seite des achtmal so kleinen Quadrates?

Nun wird $s = \sqrt{\frac{238}{8}} = \sqrt{29,75} = 5^\circ\ 4'\ 5''$.

III. Wie groß wird die Seite eines Quadrates, welches vom Quadrate 144° so viel als $^5/_7$ ist?

Hier wird $s = \sqrt{144 \times {}^5/_7} = \sqrt{\frac{144 \times 5}{7}}$
$= \sqrt{\frac{720}{8}} = \sqrt{102,8571} = 10^\circ\ 1'\ 4''$.

§. 379.

Aufgabe. Aus dem in Zahlen gegebenen Halbmesser eines Kreises und einer Sehne in ihm den Abstand derselben von dem Mittelpuncte zu berechnen.

Auflösung. Wenn man des Kreises Halbmesser r, die Sehne in ihm s, und ihren zu findenden Abstand a nennt, so ist leicht zu sehen, daß

$$a = \sqrt{\left(r^2 - (\tfrac{1}{2}s)^2\right)} \text{ ist.}$$

Beispiele. Für $r = 8^\circ$, $s = 6^\circ$ wird $a = \sqrt{(64 - 9)} = \sqrt{55} = 7^\circ\ 4'\ 1''\ 6'''$.

§. 380.

Zusatz. Auch wird hieraus noch Folgendes gefunden:

1) $\frac{1}{2}s = \sqrt{(r^2 - a^2)}$ und

2) $r = \sqrt{\left(a^2 + (\frac{1}{2}s)^2\right)}$, wozu sehr leicht Beispiele berechnet werden können.

§. 381.

Aufgabe. Der Inhalt und eine Linie einer Figur sind in Zahlen gegeben. Man soll die homologe Seite einer ihr ähnlichen von gegebener Fläche berechnen.

Auflösung. Da sich ähnliche Figuren wie die Quadrate ihrer homologen Seiten verhalten (§. 221.) so findet man zuerst das Quadrat der gesuchten Seite und daraus, durch Wurzelausziehen, die Seite selbst.

Erläuterung und Beispiele.

I. Der Inhalt eines Dreiecks ist $= 124^{\text{qo}}$ und eine Seite desselben $= 30^\circ$. Wie groß ist die homologe Seite (s) des ihm ähnlichen Dreiecks, welches 48^{qo} groß seyn soll?

Hier ist $124 : 48 = 30^2 : s^2$, folglich

$$s^2 = \frac{48 \times 30^2}{124} = \frac{43200}{124} = 348,38 \text{ und}$$

$$s = \sqrt{348,38} = 18,6 = 18° 6'.$$

II. Ein in den Grund gelegtes und ausgerechnetes Zehneck hält nach dem großen Maßstabe $865^{\square^0}$, und eine gemessene Seite desselben ist = 10°. Wie groß muß die ihr homologe Seite (s) in einem ähnlichen Zehnecke seyn, welches von jenem nur der zehnte Theil ist?

Hier wird $865 : 86,5 = 10^2 : s^2$;

daher ist $s^2 = \frac{86,5 \times 100}{865} = \frac{8650}{865}$

$= 10$, und $s = \sqrt{10}$ 3° 1′ 6″.

Noch mehrere Anwendungen dieser Lehren sind sehr leicht beizubringen.

III. Vordersätze zur rechnenden Dreieckslehre.

§. 382.

Erklärung. I. Aus dem ersten Cursus ist bekannt, daß zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel; oder eine Seite und die zwei daranliegenden Winkel; oder die drei Seiten die Größe und Gestalt eines Dreiecks bestimmen. Da aber jedes Dreieck drei Seiten und drei Winkel enthält, so kann man im ersten Falle die Größe der dritten Seite und der zwei daranliegenden Winkel; im zweiten Falle die Größe der zwei andern Seiten nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel;

und im dritten Falle die Größe jedes der drei Winkel nur durch wirkliche Construction des Dreiecks und durch das unmittelbare Messen der eben genannten Stücke bestimmen.

II. Da sowohl das wirkliche Zeichnen des Dreiecks, als auch das Messen seiner Seiten und Winkel immer mit kleinern oder größern Fehlern verknüpft ist, so haben die Geometer eine Methode erdacht, dieses schwankende Messen in ein scharfes Rechnen zu verwandeln.

III. Hieraus entstand die rechnende Dreieckslehre, d. h. eine Methode, aus den zur Bestimmung eines Dreiecks nöthigen, in Zahlen gegebenen Stücken, die übrigen durch Rechnung zu finden.

§. 383.

Anmerkung. Gewöhnlich wird diese Lehre die Trigonometrie genennt, und auf den Begriff und die Eigenschaften der sogenannten trigonometrischen Functionslinien gebaut. Hier sollen ihre Hauptlehren, als Fortsetzung der Geometrie, zuerst aus Berechnung der Sehnen und ihrer Anwendung zum Maße der Winkel, und sodann auch durch Hülfe der Sinus, Tangenten, Secanten u. s. f. auf leichtverständige Weise vorgetragen werden.

§. 384.

Erklärung. Wenn man in der Oeffnung eines gegebenen Winkels einen beliebigen Punct nimmt, diesen mit seinem Scheitel durch eine gerade Linie verbindet, damit aus jenem Puncte einen

Kreis beschreibet, der des Winkels Schenkel in zwei Puncten schneidet, und durch diese Durchschnittspuncte ebenfalls eine gerade Linie zieht, so heißt diese die dem gegebenen Winkel zugehörige Sehne.

Wenn ABD (Fig. 154.) der gegebene Winkel ist, und aus C mit CB ein Kreis beschrieben wird, welcher die Schenkel BA und BD in E und F schneidet, und nun noch EF gezogen wird, so ist diese EF die zum Winkel ABD gehörige Sehne.

§. 385.

Zusatz. Da um jedes Dreieck ein Kreis beschrieben werden kann (§. 127. I.) so ist jede Seite dieses Dreiecks die ihrem gegenüberliegenden Winkel zugehörige Sehne.

So ist (Fig. 154.) EB die zum Winkel EFB, und BF die zum Winkel BEF gehörige Sehne.

§. 386.

Zusatz. I. Die dem rechten Winkel zugehörige Sehne ist der Durchmesser eines Kreises, der durch seinen Scheitel und seine beide Schenkel construirt werden kann.

So gehört (Fig. 155.) der Durchmesser AB als Sehne zum rechten Winkel ADB.

II. Eine Sehne, die kleiner als der Durchmesser ist, gehört sowohl einem stumpfen als einem spitzen Winkel zu; so, daß ein stumpfer und ein spitzer Winkel, die zusammen zwei Rechte betragen, einerlei Sehne haben.

Die Sehne EG gehört sowohl dem stumpfen Winkel EFG, als auch dem spitzen Winkel EHG an, und man sieht leicht, daß jener so viel größer ist, als ein Rechter, um so viel dieser weniger, als der Rechte beträgt.

§. 387.

Zusatz. Da auf diese Weise die Sehnen mit den ihnen zugehörigen Winkeln wachsen und abnehmen, oder abnehmen und wachsen, so bieten dieselbe ein schickliches Maß für die ihnen angehörigen Winkel dar. Der Durchmesser, als die Sehne des rechten Winkels und als die größte gerade Linie im Kreise, ist ihre bequemste Einheit und es kömmt nur darauf an, für alle stumpfe und spitze Winkel, welche zusammen 180° betragen, die ihnen zukommenden kleinern Sehnen zu berechnen. Denn jeder bestimmte Theil des Durchmessers gehört als Sehne zwei bestimmten Winkeln zu, deren Summe = 180°. Dies gibt eine neue Methode, das Maß der Winkel nicht durch Grade (krumme Linien), sondern durch gerade Linien zu bestimmen. Aber wie können diese Sehnen berechnet werden?

§. 388.

Aufgabe. Die Möglichkeit zu zeigen, wie für einen gegebenen Durchmesser die, den verschiedenen Winkeln zugehörigen Sehnen durch Rechnung gefunden werden können.

Auflösung. I. Es sei CAB (Fig. 156.) ein gleichseitiges Dreieck, so ist aus dem Vorhergehenden bekannt, daß AB die Seite des regulären Sechsecks in einem Kreise ist, der aus C mit CA = CB beschrieben wird. Wird nun aus C auf AB das Loth CF construirt und, bis es den Bogen ADB in D schneidet, verlängert, auch BD gezogen, so ist diese die Seite des regulären Zwölfecks im Kreise.

II. Da nun das Dreieck CFB rechtwinkelig und $FB = \frac{1}{2}$ CB ist, so kann man, wenn CB in Zahlen gegeben wird, die CF berechnen. Denn wenn man CB zum Quadrate erhebt, von diesem das Quadrat von FB hinwegnimmt, so bleibt das Quadrat von CF übrig. Hieraus die Quadratwurzel gezogen, gibt die Größe von CF in Zahlen.

III. Zieht man CF von CD = CB ab, so bleibt FD übrig. Da man nun in dem rechtwinkeligen Dreiecke DFB die zwei Catheten DF und FB in Zahlen kennt, so erhebe man jede zum Quadrate, und ziehe aus ihrer Summe die Quadratwurzel, so findet man die Größe von BD in Zahlen.

IV. Auf gleiche Weise kann durch das Loth CG, durch seine Verlängerung in E und durch die beiden Dreiecke CGB und EGB die Seite BE des regulären Vierundzwanzigecks berechnet werden, und es ist klar, wie diese Rechnung weiter fortgesetzt werden kann, um die Seiten der folgenden Doppelecke zu bestimmen.

§. 389.

Zusatz. Setzt man die Seite des Sechsecks, und folglich auch den Halbmesser = 1, so findet

man nach Anleitung der vorigen Rechnungen (welche sehr nützlich von dem Anfänger selbst durchgeführt werden) folgende Resultate:

Die Seite des Zwölfecks . . . = 0, 517638 . . .
— Vierundzwanzigecks . = 0, 261052 . . .
— Achtundvierzigecks . . = 0, 130806 . . .
— Sechsundneunzigecks = 0, 065438 . . .
— Hundertzweiund neunzigecks . . . . = 0, 039723 . . .
— Dreihundertvier undachtzigecks . . . . = 0, 016362 . . .
— Siebenhundertachtund sechzigecks . . . . = 0, 008181 . . . .
— Eintaus. fünfhundert sechsunddreissigecks . . = 0, 004096 . . .
— Dreitausendzweiund siebenzigecks . . . . . = 0, 002045 . . .

§. 389. *a.*

Zusatz. Nimmt man den Durchmesser des Kreises = 1, so wird der Halbmesser = $\frac{1}{2}$, und jede der im vorigen §. angeführten Vielecksseiten um ihre Hälfte vermindert. Sie lassen sich daher für diese Annahme leicht berechnen.

§. 389. *b.*

Zusatz. Da der 12 Ecksseite ein Mittelpunctswinkel von 30°, folglich ein Peripheriewinkel von 15° zugehört, so entsteht hieraus folgende Uebersicht:

Zur	12	Ecksseite	gehört ein	W. von	15°.
»	24	»	»	»	7°30′
»	48	»	»	»	3°45′
»	96	»	»	»	1°52′30″
»	192	»	»	»	0°56′15
»	384	»	»	»	0°28′7″30‴
»	768	»	»	»	0°14′3″45‴
»	1536	»	»	»	0°7′1″52‴30^{IV}
»	3072	»	»	»	0°3′30″56‴15^{IV}

§. 390.

Zusatz. Durch Hülfe ähnlicher Rechnungen kann man für jeden Winkel am Mittelpuncte die ihm zugehörige Sehne finden, wenn der Halbmesser in Zahlen gegeben ist. Da nun jede Sehne zu einem halb so großen Peripheriewinkel gehört, so ist ersichtlich, wie man auch hierdurch die, allen Peripheriewinkeln zugehörigen Sehnen berechnen kann. Die wirkliche Ausführung dieser Rechnung muß aber hier übergangen werden.

§. 391.

Anmerkung. I. Die vorige Aufgabe erläutert auch die Methode, wie man bei gegebenem Halbmesser den Umfang des damit beschriebenen Kreises berechnen könne. Denn wenn man den Kreis nur als ein regelmäßiges Sechsundneunzigeck berechnen will, so ist für den Halbmesser = 1 die Seite dieses Sechsundneunzigecks = 0,065438 (§. 389.) und dessen Umfang = 0,065438 × 96 = 0,6282048, wovon die Hälfte = 3,141024 den Umfang des Kreises für den Durchmesser = 1 schon mit

ziemlicher Genauigkeit gibt. Betrachtet man den Kreis als ein Dreitausendzweiundsiebenzigeck, so wird für den Durchmesser = 1 die Peripherie = 3,141120. Dies erläutern die oben (II. Cursus) angeführten Sätze vom Kreise.

II. Ein berühmter Mathematiker, Ludolph von Kölln (van Ceulen), welcher im Jahr 1610 zu Leiden gestorben ist, hat das Verhältniß vom Durchmesser zum Umkreise auf 34 Decimalstellen bestimmt, und durch ungemein mühsame Rechnungen gefunden, daß zum Durchmesser = 1 eine Peripherie = 3,141592 653589 793238 462643 383279 5028 gehöre.

§. 391. *a*.

Anmerkung. Zur fernern Erläuterung dient folgende Tabelle, woraus man sieht, daß die Fläche des äussern und innern regelmäßigen 32768 Ecks in den ersten 7 Decimalstellen übereinstimmt. Der Halbmesser ist = 1.

Seitenzahl der Vielecke.	Fläche der innern Vielecke.	Fläche der äussern Vielecke.
4	2,0000000	4,0000000
8	2,8284271	3,3137085
16	3,0614674	3,1825979
32	3,1214451	3,1517249
64	3,1365485	3,1441184
128	3,1403311	3,1422236
256	3,1412772	3,1417504
512	3,1415138	3,1416321
1024	3,1415729	3,1416025
2048	3,1415877	3,1415951
4096	3,1415914	3,1415933
8192	3,1415923	3,1415928
16384	3,1415925	3,1415927
32768	3,1415926	3,1415926

Da man nun die halbe Umfangslinie eines regelmäßigen Vielecks findet, wenn man mit dessen Halbmesser in seinen Flächeninhalt dividirt, so ist 3,1415926 . . . der halbe Umfang des 32768 Ecks für den Halbmesser = 1. Daher wird denn für den Durchmesser = 1 der ganze Umfang dieses regelmäßigen Vielecks d. h. des Kreises, bis auf die siebente Decimalbruchstelle, auch wieder = 3,1415926 . . . wie vorhin (in §. 391.)

§. 392.

Erklärung. Auf diese Weise erkennt man, wie es möglich war, eine Sehnentafel zu berechnen, d. h. eine Sammlung von Winkeln und den dazu gehörigen Sehnen für einen bestimmten Durchmesser. Bei der hier folgenden Tafel wurde der Durchmesser in 10000000 gleiche Theilchen getheilt angenommen, und die Sehnen aller Winkel von fünf zu fünf Minuten nach diesen Theilchen berechnet. Den nähern Gebrauch dieser Tafel werden nun gleich mehrere Beispiele lehren.

§. 393.

Sehnen-Tafel
von
fünf zu fünf Minuten
für
alle Winkel von 5′ bis zu 90°.

Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.
5′	14544	35′	276309	5′	537883
10′	29089	40′	290847	10′	552406
15′	43633	45′	305385	15′	566928
20′	58177	50′	319922	20′	581448
25′	72721	55′	334459	25′	595967
30′	87265	2° —	348995	30′	610485
35′	101809	5′	363530	35′	625002
40′	116353	10′	378065	40′	639517
45′	130896	15′	392598	45′	654031
50′	145439	20′	407131	50′	668544
55′	159982	25′	421663	55′	683055
1° —	174524	30′	436194	4° —	697565
5′	189066	35′	450724	5′	712073
10′	203608	40′	465253	10′	726580
15′	218149	45′	479781	15′	741085
20′	232690	50′	494308	20′	755589
25′	247230	55′	508835	25′	770091
30′	261769	3° —	523360	30′	784591

Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.
35′	799090	35′	1319681	35′	1836654
40′	813587	40′	1334096	40′	1850949
45′	828082	45′	1348509	45′	1865240
50′	842576	50′	1362919	50′	1879527
55′	857067	55′	1377327	55′	1893811
5°—	871557	8°—	1391731	11°—	1908090
5′	886046	5′	1406132	5′	1922365
10′	900532	10′	1420531	10′	1936636
15′	915016	15′	1434926	15′	1950903
20′	929499	20′	1449319	20′	1965166
25′	943979	25′	1463708	25′	1979425
30′	958458	30′	1478094	30′	1993679
35′	972934	35′	1492477	35′	2007930
40′	987408	40′	1506857	40′	2022176
45′	1001881	45′	1521234	45′	2036417
50′	1016351	50′	1535607	50′	2050655
55′	1030819	55′	1549978	55′	2064888
6°—	1045285	9°—	1564345	12°—	2079117
5′	1059748	5′	1578708	5′	2093341
10′	1074210	10′	1593069	10′	2107561
15′	1088669	15′	1607426	15′	2121777
20′	1103126	20′	1621779	20′	2135988
25′	1117580	25′	1636129	25′	2150194
30′	1132032	30′	1650476	30′	2164396
35′	1146482	35′	1664819	35′	2178593
40′	1160929	40′	1679159	40′	2192786
45′	1175374	45′	1693495	45′	2206974
50′	1189816	50′	1707828	50′	2221158
55′	1204256	55′	1722156	55′	2235337
7°—	1218693	10°—	1736482	13°—	2249511
5′	1233128	5′	1750803	5′	2263680
10′	1247560	10′	1765121	10′	2277844
15′	12619 0	15′	1779435	15′	2292004
20′	1276416	20′	1793746	20′	2306159
25′	1290841	25′	1808052	25′	2320309
30′	1305262	30′	1822355	30′	2334454

Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.
35′	2348594	35′	2854096	35′	3351775
40′	2362729	40′	2868032	40′	3365475
45′	2376859	45′	2881963	45′	3379167
50′	2390984	50′	2895887	50′	3392853
55′	2405104	55′	2909805	55′	3406530
14°—	2419219	17°—	2923717	20°—	3420202
5′	2433329	5′	2937623	5′	3433865
10′	2447433	10′	2951522	10′	3447522
15′	2461533	15′	2965416	15′	3461171
20′	2475627	20′	2979303	20′	3474813
25′	2489716	25,	2993184	25′	3488447
30′	2503800	30′	3007058	30′	3502074
35′	2517879	35′	3020926	35′	3515693
40′	2531952	40′	3034788	40′	3529306
45′	2546019	45′	3048643	45′	3542910
50′	2560082	50′	3062492	50′	3556508
55′	2574139	55′	3076334	55′	3570097
15°—	2588190	18°—	3090170	21°—	3583679
5′	2602237	5′	3103999	5′	3597254
10′	2616277	10′	3117822	10′	3610821
15′	2630312	15′	3131638	15′	3624380
20′	2644342	20′	3145448	20′	3637932
25′	2658365	25′	3159250	25′	3651476
30′	2672384	30′	3173047	30′	3665013
35′	2686396	35′	3186836	35′	3678541
40′	2700403	40′	3200619	40′	3692062
45′	2714404	45′	3214395	45′	3705574
50′	2728400	50′	3228164	50′	3719080
55′	2742390	55′	3241926	55′	3732577
16°—	2756374	19°—	3255682	22°—	3746066
5′	2770352	5′	3269430	5′	3759547
10′	2784324	10′	3283172	10′	3773021
15′	2798290	15′	3296906	15′	3786486
20′	2812251	20′	3310634	20′	3799944
25′	2826205	25′	3324355	25′	3813393
30′	2840153	30′	3338069	30′	3826834

Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.
35′	3840268	35′	4318234	35′	4784364
40′	3853693	40′	4331348	40′	4797131
45′	3867110	45′	4344453	45′	4809888
50′	3880518	50′	4357548	50′	4822634
55′	3893919	55′	4370634	55′	4835370
23°—	3907311	26°—	4383712	29°—	4848096
5′	3920695	5′	4396779	5′	4860812
10′	3934071	10′	4409838	10′	4873517
15′	3947439	15′	4422887	15′	4886212
20′	3960798	20′	4435927	20′	4898897
25′	3974148	25′	4448957	25′	4911571
30′	3987491	30′	4461978	30′	4924236
35′	4000824	35′	4474990	35′	4936889
40′	4014150	40′	4487992	40′	4949533
45′	4027467	45′	4500985	45′	4962165
50′	4040775	50′	4513968	50′	4974787
55′	4054075	55′	4526941	55′	4987399
24°—	4067366	27°—	4539905	30°—	5000000
5′	4080649	5′	4552859	5′	5012591
10′	4093923	10′	4565804	10′	5025170
15′	4107189	15′	4578739	15′	5037740
20′	4120446	20′	4591664	20′	5050299
25′	4133693	25′	4604580	25′	5062846
30′	4146932	30′	4617486	30′	5075384
35′	4160163	35′	4630382	35′	5087910
40′	4173385	40′	4643269	40′	5100426
45′	4186597	45′	4656145	45′	5112931
50′	4199801	50′	4669012	50′	5125425
55′	4212996	55′	4681869	55′	5137908
25°—	4226183	28°—	4694716	31°—	5150381
5′	4239360	5′	4707553	5′	5162842
10′	4252528	10′	4720380	10′	5175293
15′	4265687	15′	4733197	15′	5187733
20′	4278838	20′	4746004	20′	5200161
25′	4291979	25′	4731801	25′	5212579
30′	4305111	30′	4758588	30′	5224986

Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.
35′	5237381	35′	5676043	35′	6099147
40′	5249766	40′	5688011	40′	6110666
45′	5262139	45′	5699968	45′	6122173
50′	5274502	50′	5711912	50′	6133666
55′	5286853	55′	5723844	55′	6145147
32°—	5299193	35°—	5735764	38°—	6156615
5′	5311521	5′	5747672	5′	6168069
10′	5323839	10′	5759568	10′	6179511
15′	5336145	15′	5771452	15′	6190940
20′	5348440	20′	5783323	20′	6202355
25′	5360724	25′	5795183	25′	6213757
30′	5372996	30′	5807030	30′	6225146
35′	5385257	35′	5818864	35′	6236522
40′	5397507	40′	5830687	40′	6247885
45′	5409745	45′	5842497	45′	6259235
50′	5421971	50′	5854294	50′	6270571
55′	5434180	55′	5866080	55′	6281894
33°—	5446390	36°—	5877853	39°—	6293204
5′	5458583	5′	5889613	5′	6304500
10′	5470763	10′	5901361	10′	6315784
15′	5482932	15′	5913096	15′	6327053
20′	5495090	20′	5924819	20′	6338309
25′	5507236	25′	5936530	25′	6349553
30′	5519370	30′	5948228	30′	6360782
35′	5531492	35′	5959913	35′	6371998
40′	5543603	40′	5971586	40′	6383201
45′	5555702	45′	5983246	45′	6394390
50′	5567790	50′	5994893	50′	6405566
55′	5579865	55′	6006528	55′	6416727
34°—	5591929	37°—	6018150	40°—	6427876
5′	5603981	5′	6029760	5′	6439011
10′	5616021	10′	6041356	10′	6450132
15′	5628049	15′	6052940	15′	6461240
20′	5640065	20′	6064511	20′	6472334
25′	5652070	25′	6076069	25′	6483414
30′	5664062	30′	6087614	30′	6494480

Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.
35′	6505533	35′	6894089	35′	7263748
40′	6516572	40′	6904617	40′	7273736
45′	6527598	45′	6915131	45′	7283709
50′	6538609	50′	6925630	50′	7293667
55′	6549606	55′	6936114	55′	7303610
41°—	6560590	44°—	6946584	47°—	7313537
5′	6571560	5′	6957039	5′	7323448
10′	6582516	10′	6967479	10′	7333345
15′	6593458	15′	6977905	15′	7343225
20′	6604386	20′	6988315	20′	7353090
25′	6615300	25′	6998711	25′	7362939
30′	6626201	30′	7009093	30′	7372773
35′	6637087	35′	7019459	35′	7382592
40′	6647959	40′	7029811	40′	7392394
45′	6658817	45′	7040147	45′	7402181
50′	6669661	50′	7050469	50′	7411953
55′	6680491	55′	7060776	55′	7421708
42°—	6691306	45°—	7071068	48°—	7431448
5′	6702107	5′	7081345	5′	7441172
10′	6712895	10′	7091607	10′	7450881
15′	6723668	15′	7101854	15′	7460574
20′	6734427	20′	7112086	20′	7470251
25′	6745172	25′	7122303	25′	7479912
30′	6755902	30′	7132504	30′	7489557
35′	6766618	35′	7142691	35′	7499187
40′	6777320	40′	7152863	40′	7508800
45′	6788007	45′	7163019	45′	7518398
50′	6798681	50′	7173161	50′	7527980
55′	6809339	55′	7183287	55′	7537546
43°—	6819984	46°—	7193398	49°—	7547096
5′	6830613	5′	7203494	5′	7556630
10′	6841229	10′	7213574	10′	7566147
15′	6851830	15′	7223640	15′	7575650
20′	6862416	20′	7233690	20′	7585136
25′	6872988	25′	7243724	25′	7594606
30′	6883545	30′	7253744	30′	7604060

Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.
35′	7613497	35′	7942379	35′	8249491
40′	7622919	40′	7951208	40′	8257703
45′	7632325	45′	7960020	45′	8265897
50′	7641714	50′	7968815	50′	8274074
55′	7651087	55′	7977593	55′	8282234
50°—	7660444	53°—	7986355	56°—	8290376
5′	7669785	5′	7995100	5′	8298500
10′	7679110	10′	8003827	10′	8306607
15′	7688418	15′	8012538	15′	8314696
20′	7697710	20′	8021232	20′	8322768
25′	7706986	25′	8029909	25′	8330821
30′	7716246	30′	8038569	30′	8338858
35′	7725489	35′	8047211	35′	8346877
40′	7734716	40′	8055837	40′	8354878
45′	7743927	45′	8064446	45′	8362861
50′	7753121	50′	8073038	50′	8370827
55′	7762298	55′	8081612	55′	8378775
51°—	7771460	54°—	8090170	57°—	8386706
5′	7780604	5′	8098710	5′	8394618
10′	7789733	10′	8107233	10′	8402513
15′	7798845	15′	8115740	15′	8410390
20′	7807940	20′	8124229	20′	8418249
25′	7817019	25′	8132701	25′	8426091
30′	7826082	30′	8141155	30′	8433914
35′	7835128	35′	8149593	35′	8441720
40′	7844157	40′	8158013	40′	8449508
45′	7853169	45′	8166415	45′	8457278
50′	7862165	50′	8174801	50′	8465030
55′	7871145	55′	8183169	55′	8472764
52°—	7880107	55°—	8191521	58°—	8480481
5′	7889054	5′	8199854	5′	8488179
10′	7897983	10′	8208170	10′	8495860
15′	7906896	15′	8216469	15′	8503522
20′	7915792	20′	8224751	20′	8511166
25′	7924671	25′	8233015	25′	8518793
30′	7933533	30′	8241262	30′	8526402

Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.
35′	8533992	35′	8795101	35′	9032105
40′	8541564	40′	8802014	40′	9038338
45′	8549118	45′	8808907	45′	9044551
50′	8556655	50′	8815782	50′	9050746
55′	8564173	55′	8822638	55′	9056921
59°—	8571673	62°—	8829476	65°—	9063078
5′	8579155	5′	8836294	5′	9069215
10′	8586618	10′	8843095	10′	9075333
15′	8594064	15′	8849876	15′	9081432
20′	8601491	20′	8856639	20′	9087511
25′	8608900	25′	8863383	25′	9093571
30′	8616292	30′	8870108	30′	9099613
35′	8623664	35′	8876815	35′	9105635
40′	8631019	40′	8883502	40′	9111637
45′	8638355	45′	8890171	45′	9117620
50′	8645673	50′	8896821	50′	9123584
55′	8652972	55′	8903453	55′	9129529
60°—	8660254	63°—	8910065	66°—	9135454
5′	8667517	5′	8916659	5′	9141361
10′	8674762	10′	8923233	10′	9147247
15′	8681988	15′	8929789	15′	9153115
20′	8689196	20′	8936327	20′	9158963
25′	8696380	25′	8942844	25′	9164791
30′	8703557	30′	8949343	30′	9170601
35′	8710710	35′	8955824	35′	9176390
40′	8717844	40′	8962285	40′	9182161
45′	8724960	45′	8968727	45′	9187912
50′	8732058	50′	8975151	50′	9193644
55′	8739136	55′	8981555	55′	9199356
61°—	8746197	64°—	8987940	67°—	9205049
5′	8753239	5′	8994304	5′	9210722
10′	8760262	10′	9000654	10′	9216375
15′	8767267	15′	9006982	15′	9222009
20′	8774254	20′	9013291	20′	9227624
25′	8781222	25′	9019582	25′	9233219
30′	8788171	30′	9025853	30′	9238795

Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.
35′	9244351	35′	9431260	35′	9592318
40′	9249888	40′	9436085	40′	9596418
45′	9255405	45′	9440890	45′	9600498
50′	9260903	50′	9445675	50′	9604558
55′	9266380	55′	9450440	55′	9608598
68°—	9271839	71°—	9455185	74°—	9612617
5′	9277277	5′	9459910	5′	9616616
10′	9282696	10′	9464616	10′	9620594
15′	9288095	15′	9469301	15′	9624553
20′	9293475	20′	9473966	20′	9628490
25′	9298835	25′	9478611	25′	9632408
30′	9304175	30′	9483236	30′	9636305
35′	9309496	35′	9487841	35′	9640181
40′	9314797	40′	9492426	40′	9644037
45′	9320079	45′	9496991	45′	9647873
50′	9325340	50′	9501536	50′	9651688
55′	9330582	55′	9506060	55′	9655483
69°—	9335804	72°—	9510565	75°—	9659258
5′	9341007	5′	9515049	5′	9663012
10′	9346189	10′	9519514	10′	9666746
15′	9351352	15′	9523958	15′	9670459
20′	9356495	20′	9528382	20′	9674152
25′	9361618	25′	9532786	25′	9677825
30′	9366722	30′	9537169	30′	9681476
35′	9371805	35′	9541533	35′	9685108
40′	9376869	40′	9545876	40′	9688718
45′	9381913	45′	9550199	45′	9692309
50′	9386937	50′	9554502	50′	9695879
55′	9391942	55′	9558785	55′	9699428
70°—	9396926	73°—	9563048	76°—	9702957
5′	9401890	5′	9567290	5′	9706466
10′	9406835	10′	9571512	10′	9709954
15′	9411760	15′	9575714	15′	9713421
20′	9416665	20′	9579895	20′	9716867
25′	9421550	25′	9584056	25′	9720293
30′	9426415	30′	9588197	30′	9723699

Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.
35′	9727084	35′	9835189	35′	9916337
40′	9730448	40′	9837808	40′	9918203
45′	9733792	45′	9840407	45′	9920049
50′	9737116	50′	9842985	50′	9921874
55′	9740419	55′	9845541	55′	9923678
77°—	9743701	80°—	9848077	83°—	9925462
5′	9746962	5′	9850592	5′	9927223
10′	9750203	10′	9853087	10′	9928964
15′	9753423	15′	9855561	15′	9930684
20′	9756623	20′	9858013	20′	9932383
25′	9759802	25′	9860445	15′	9934062
30′	9762960	30′	9862856	30′	9935718
35′	9766098	35′	9865246	35′	9937354
40′	9769215	40′	9867615	40′	9938969
45′	9772311	45′	9869964	45′	9940563
50′	9775386	50′	9872291	50′	9942136
55′	9778441	55′	9874598	55′	9943688
78°—	9781476	81°—	9876883	84°—	9945218
5′	9784490	5′	9879148	5′	9946728
10′	9787483	10′	9881392	10′	9948217
15′	9790455	15′	9883615	15′	9949685
20′	9793406	20′	9885817	20′	9951132
25′	9796337	25′	9887998	25′	9952557
30′	9799147	30′	9890158	30′	9953962
35′	9802136	35′	9892298	35′	9955345
40′	9805005	40′	9894416	40′	9956708
45′	9807853	45′	9896514	45′	9958049
50′	9810680	50′	9898590	50′	9959369
55′	9813486	55′	9900645	55′	9960669
79°—	9816271	82°—	9902680	85°—	9961947
5′	9819036	5′	9904694	5′	9963204
10′	9821781	10′	9906687	10′	9964440
15′	9824504	15′	9908659	15′	9965655
20′	9827206	20′	9910609	20′	9966849
25′	9829888	25′	9912539	25′	9968022
30′	9832549	30′	9914449	30′	9969173

Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.
35′	9970303	5′	9987045	35′	9996943
40′	9971413	10′	9987775	40′	9997292
45′	9972502	15′	9988484	45′	9997620
50′	9973569	20′	9989171	50′	9997927
55′	9974615	25′	9989837	55′	9998212
86°—	9975640	30′	9990482	89°—	9998477
5′	9976644	35′	9991106	5′	9998720
10′	9977627	40′	9991709	10′	9998942
15′	9978589	45′	9992290	15′	9999143
20′	9979529	50′	9992851	20′	9999323
25′	9980449	55′	9993390	25′	9999482
30′	9981348	88°—	9993908	30′	9999619
35′	9982225	5′	9994406	35′	9999735
40′	9983081	10′	9994881	40′	9999830
45′	9983916	15′	9995336	45′	9999905
50′	9984731	20′	9995769	50′	9999958
55′	9985524	25′	9996182	55′	9999989
87°—	9986295	30′	9996573	90°—	9999999

IV. Berechnung der fehlenden Stücke des Dreiecks.

§. 394.

Lehrsatz. Die in Kreisen von verschiedenen Durchmessern zu gleichen Winkeln gehörigen Sehnen sind im geraden Verhältnisse dieser Durchmesser.

Es sei (Fig. 154.) W. ABD = W. IKL. (Fig. 157.), in der Fläche eines jeden ein willkührlicher Punct C und O genommen, aus diesem mit CB und OK ein Kreis beschrieben und die Sehne EF und MN gezogen, so ist EF : MN = BG : KP.

Beweis. Wenn man CE, CF und OM, ON zieht, so ist das Dreieck ECF dem Dreiecke MON ähnlich, weil W. ECF = W. MON. (§. 203. I, 1.) Daher EF : MN = EC : MO, und folglich = BG : KP.

§. 395.

Lehrsatz. In jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten, wie die Sehnen der ihnen gegenüberliegenden Winkeln.

Wenn EBF (Fig. 154.) ein gegebenes Dreieck ist, so verhält sich BE : EF : FB = Sehne W. EFB : Sehne W. FBE : Sehne W. BEF.

Beweis. Wenn man um das gegebene Dreieck einen Kreis beschreibt, (§. 127.) so ist klar, daß

jede Dreiecksseite die Sehne des ihr gegenüberliegenden Winkels ist.

§. 396.

Anmerkung. Dieser Lehrsatz mußte bewiesen werden, um sich zu überzeugen, daß gleiche Winkel, auch bei Kreisen von verschiedenen Durchmessern, durch Sehnen bestimmt werden, welche mit diesen Durchmessern in einem unveränderlichen Verhältnisse stehen.

§. 397.

Lehrsatz. Wenn aus den, in Zahlen gegebenen Stücken eines Dreiecks die fehlenden durch Rechnung gefunden werden sollen, so muß unter jenen wenigstens eine Seite seyn.

Beweis. Denn die Winkel bestimmen nur die Gestalt, nicht die Größe des Dreiecks. (§. 203, I, 1.).

§. 398.

Anmerkung. Auf diese Vordersätze soll nun die wirkliche Berechnung der fehlenden Stücke in gegebenen Dreiecken folgen. Zuerst betrachten wir die rechtwinkeligen, dann die gleichschenkeligen, endlich die Dreiecke überhaupt.

§. 399.

Anmerkung. Der erste Erfinder der Sehnen-Tafeln und ihres Gebrauches in der rechnenden Dreieckslehre soll Hipparch gewesen seyn, der im zweiten Jahrhunderte vor Christi Geburt gelebt hat.

A) Von rechtwinkeligen Dreiecken.

§. 400.

Aufgabe. Die möglichen Fälle zu bestimmen, welche bei der Berechnung der fehlenden Stücke im rechtwinkeligen Dreiecke Statt finden können.

Auflösung. Da in dem rechtwinkeligen Dreiecke der rechte Winkel immer gegeben ist, so findet man für das Dreieck ABC (Fig. 158.) folgende vier Fälle:

I. Fall.

Gegeben: AC und W. A, oder AC und W. C.
Gesucht: W. C, AB und BC, oder W. A, AB und BC.

II. Fall.

Gegeben: AB und W. A oder W. C, oder BC und W. C oder W. A.
Gesucht: BC, AC und W. C oder W. A, oder AB, AC und W. A oder W. C.

III. Fall.

Gegeben: AC und AB, oder AC und BC.
Gesucht: W. C, W. A und BC, oder W. A, W. C und AB.

IV. Fall.

Gegeben: AB und BC.
Gesucht: AC, W. A und W. B.

Diese vier Fälle sollen nun einzeln durchgeführt und zur größern Uebung der Anfänger mit Zahlen-

beispielen erläutert werden, wobei es sich von selbst versteht, daß man alle Linien hier arithmetisch, d. h. nach ihrem Zahlenwerthe betrachtet.

401.

I. Aufgabe. Aus der Hypotenuse und einem daranliegenden spitzen Winkel den andern spitzen Winkel und die beiden Catheten zu finden.

Auflösung. I. Wenn AC und W. A gegeben wird, so ist:

1. W. C = 90° — W. A.

2. Sehne W. B : Sehne W. A = CA : BC, folglich

$$BC = \frac{\text{Sehne W. A} \times AC}{\text{Sehne W. B}},$$

3. Sehne W. A : Sehne W. C = BC : AB, folglich

$$AB = \frac{\text{Sehne W. G} \times BC}{\text{Sehne W. A}},$$

4. Auch hätte man AB durch folgende Proportion: Sehne W. B : Sehne W. C = AC : AB finden können, wodurch $AB = \frac{\text{Sehne W. C} \times AC}{\text{Sehne W. B.}}$ wird.

5. Ferner hätte die Größe von AB durch den Ausdruck: $AB = \sqrt{(AC^2 - BC^2)}$ gefunden werden können.

II. Wäre aber AC und W. C gegeben, so ist:

1. W. A = 90° — W. C,

2. Sehne W. B : Sehne W. C = AC : AB

folglich $AB = \frac{\text{Sehne W. C} \times AC}{\text{Sehne W. B}},$

3. Sehne W. C : Sehne W. A = AB : BC, folglich $BC = \frac{\text{Sehne W. } A \times AB}{\text{Sehne W. } C}$.

4. Diese BC kann auch hier (so wie in I.) noch auf doppelte Weise gefunden werden.

Beispiele. Zu I. Es sei AC = 148′, und W. A = 30° 15′, so ist

1. W. C = 90° — 30° 15′ = 59° 45′.

2. Sehne W. 90° : Sehne W. 30° 15′ = 148′ : BC; folglich $BC = \frac{\text{Sehne W. } 30° 15' \times 148'}{\text{Sehne W. } 90°} =$

$= \frac{5037740 \times 148'}{10000000} = \frac{745585520}{10000000} = 74' \, 5'' \, 5''' \ldots$

3. Sehne W. 30° 15′ : Sehne W. 59° 45′ = 74′ 5″ : AB; folglich $AB = \frac{\text{Sehne W. } 59° 45'' \times 74' \, 5''}{\text{Sehne W. } 30° 15'}$

$= \frac{8638355 \times 745''}{5037740} = \frac{6435574475}{5037740} = 127' \, 7''$

Zu II. Es sei AC = 612 und W. C = 46° 30′, so ist

1. W. A = 90° — 46° 30′ = 43° 30′.

2. Sehne W. 90° : Sehne W. 46° 30′ = 612′ : AB, folglich $AB = \frac{\text{Sehne W. } 46° 30' \times 612'}{\text{Sehne W. } 90°.} =$

$= \frac{7253744 \times 612'}{10000000} = \frac{4439291328}{10000000} = 443' \, 9'' \, 2''' \ldots$

3. Sehne W. 46° 30′ : Sehne W. 43° 30′ = 443′ 9″ 2‴ : BC, folglich BC =

$\frac{\text{Sehne W.} 43° 30' \times 443' 9'' 2'''}{\text{Sehne W. } 46° 30'} = \frac{6883546 \times 44392'''}{7253744}$

$$= \frac{305574374132}{7253744} = 421' \, 2'' \, 6'''$$

4. Die übrigen Berechnungsweisen von AB in I. und von BC in II. werden zur Privatübung empfohlen.

§. 402.

II. Aufgabe. Aus einer Cathete und einem gegebenen spitzen Winkel den andern spitzen Winkel, die andere Cathete und die Hypotenuse zu finden.

Auflösung. I. Wenn AB und W. A oder W. C gegeben wird, so ist

1. W. C = 90° — W. A, oder W. A = 90° — W. C,

2. Sehne W. C : Sehne W. A = AB : BC, folglich $BC = \frac{\text{Sehne W. A} \times AB}{\text{Sehne W. C}}$,

3. Sehne W. C : Sehne W. B = AB : AC, folglich $AC = \frac{\text{Sehne W. B} \times AB}{\text{Sehne W. C}}$.

II. Wird aber BC und W. C oder A gegeben, so ist

1. W. A = 90° — W. C, oder W. C = 90° — W. A,

2. Sehne W. A : Sehne W. C = BC : AB, folglich $AB = \frac{\text{Sehne W. C} \times BC}{\text{Sehne W. A}}$,

3. Sehne W. A : Sehne W. B = BC : AC folglich $AC = \frac{\text{Sehne W. B} \times BC}{\text{Sehne W. A}}$.

Beispiele. Zu I. Es sei AB = 86′ und W. A = 38° 45, so ist.

1. W. C = 90° — 38° 45′ = 51° 15′,

2. Sehne W. 51° 15′ : Sehne W. 38° 45′ = 86′ : BC, folglich BC = $\frac{\text{Sehne W. } 38° 45' \times 86'}{\text{Sehne W. } 51° 15'}$ = $\frac{6259235 \times 86'}{7798845}$ = $\frac{538294210}{7798845}$ = 69′ 0″ 2‴..

3. Sehne W. 51° 15′ : Sehne W. 90° = 86′ : AC, folglich AC = $\frac{\text{Sehne W. } 90° \times 86'}{\text{Sehne W. } 51° 15'}$ = $\frac{10000000 \times 86'}{7798845}$ = $\frac{860000000}{7798845}$ = 11′ 0″ 2‴..

Zu II. Es sei BC = 344′ und W. C = 30° 15′, so ist

1. W. A = 90° — 30° 15′ = 59° 45′,

2. Sehne W. 59° 45′ : Sehne W. 30° 15′ = 344′ : AB, folglich AB = $\frac{\text{Sehne W. } 30° 15' \times 344'}{\text{Sehne W. } 59° 45'}$ = $\frac{5037740 \times 344'}{8638355}$ = $\frac{1732982560}{8638355}$ = 20′ 0″ 6‴

3. Sehne W. 59° 45′ : Sehne W. 90° = 344′ : AC, folglich AC = $\frac{\text{Sehne W. } 90° \times 344'}{\text{Sehne W. } 59° 45'}$ = $\frac{10000000 \times 344'}{8638355}$ = $\frac{3440000000}{8638355}$ = 398′ 2″ 4‴.

§. 403.

III. Aufgabe. Aus der gegebenen Hypotenuse und einer Cathete die spitzen Winkel und die andere Cathete zu finden.

Auflösung. I. Es sei AC und AB gegeben, so ist

1. AC : AB = Sehne W. 90° : Sehne W. C,

folglich Sehne W. C $= \frac{AB \times \text{Sehne W. } 90°}{AC}$,

2. W. A = 90° — W. C.

3. Sehne W. B : Sehne W. A = AC : BC,

folglich BC $= \frac{\text{Sehne W. A} \times AC}{\text{Sehne W. B}}$.

II. Wenn aber AC und CB gegeben sind, so ist

1. AC : CB = Sehne W. 90° : Sehne W. A,

folglich Sehne W. A $= \frac{CB \times \text{Sehne W. } 90°}{AC}$,

2. W. C = 90° — W. A,

3. Sehne W. B : Sehne W. C = AC : AB,

folglich AB $= \frac{\text{Sehne W. C} \times AC}{\text{Sehne W. B}}$.

Beispiele. Zu I. Es sei AC = 64′ und AB = 40′, so ist

1. 64′ : 40′ = Sehne W. 90° : Sehne W. C,

folglich Sehne W. C $= \frac{40' \times \text{Sehne W. } 90°}{64'} =$

$= \frac{40' \times 10000000}{64} = \frac{400000000}{64} = 6250000$

Da nun diese Sehne zunächst zu dem Winkel von 38° 40′ gehört, so ist W. C = 38° 40′.

2. W. A = 90° — W. C = 90° — 38° 40′ = 51° 20′.

3. Sehne W. 90° : Sehne W. 51° 20′ = 64′ : BC, folglich $CB = \frac{\text{Sehne W. } 51^\circ\ 20' \times 64'}{\text{Sehne W. } 90^\circ} =$

$$\frac{7807940 \times 64'}{10000000} = \frac{499708160}{10000000} = 49^\circ\ 9'\ 7''.$$

Zu II. Es sei AC = 322′ und CB = 264′, so ist

1. 322′ : 264′ = Sehne W. 90° : Sehne W. A, folglich Sehne W. $A = \frac{264' \times \text{Sehne W. } 90^\circ}{322'} =$

$$\frac{264' \times 10000060}{322} = \frac{2640000000}{322} = 8198757$$

wozu ein Winkel von 55° 5′ gehört,

2. W. C = 90° — W. A = 90° — 55° 5′ = 34° 55′,

3. Sehne W. 90° : Sehne W. 34° 55′ = 322′ : AB, folglich $AB = \frac{\text{Sehne W. } 34^\circ\ 55' \times 322}{\text{Sehne W. } 90^\circ}$

$$\frac{5723844 \times 322'}{10000000} = \frac{1843077768}{10000000} = 134'\ 3''\ 0''.$$

§. 404.

IV. Aufgabe. Aus den beiden Catheten die Hypotenuse und die spitzen Winkel zu finden.

Auflösung. Wenn AB und BC gegeben sind, so findet man

1. AC dadurch, daß man das Maß von AB und das Maß von BC zum Quadrate erhebt, diese Quadrate addirt und aus ihrer Summe die Quadratwurzel zieht,

2. AC : BC = Sehne W. B : Sehne W. A,

folglich Sehne W. A $= \frac{BC \times \text{Sehne W. B}}{AC}$,

3. W. C = 90° — W. A.

Beispiel. Es sei AB = 24′ und BC = 16′, so ist

1. AB $= \sqrt{(24^2 + 16^2)} = \sqrt{(576 + 256)} = \sqrt{832} = 28' \ 8''$,

2. 28′ 8″ : 16′ = Sehne W. 90° : Sehne W. A,

folglich Sehne W. A $= \frac{160'' \times 10000000}{288''} =$ $\frac{1600000000}{288} = 5555555$, welche einem Winkel von 33° 45′ zugehört,

3. W. C = 90° — 33° 45′ = 56° 15′.

§. 405.

Anmerkung. Da man aus irgend zwei gegebenen Seiten im rechtwinkeligen Dreiecke die dritte Seite, vermöge des Pythagorischen Lehrsatzes, durch Rechnung finden kann, so können in den vorhergehenden Aufgaben einige dieser Linien auch auf solche Weise berechnet werden. Es ist Anfängern zu rathen, beide Rechnungen zu führen, wodurch zugleich eine der andern zur Probe dient.

B) Von gleichschenkeligen Dreiecken.

§. 406.

Aufgabe. Die Fälle zu bestimmen, welche Statt finden können, wenn man im gleichschenkeligen Dreiecke aus den gegebenen Stücken die übrigen berechnen soll.

Auflösung. Da unter den gegebenen Stücken wenigstens eine Seite seyn muß, und in dem gleichschenkeligen Dreiecke aus einem gegebenen Winkel die zwei andern leicht gefunden werden können, so sind nur folgende drei Fälle möglich:

I. Aus der Grundlinie und einem der gleichen Schenkel die Winkel zu finden.

II. Aus der Grundlinie und den Winkeln die gleichen Schenkel zu finden.

III. Aus den gleichen Schenkeln und den Winkeln die Grundlinie zu finden.

Es sei BAC (Fig. 159.) das gegebene Dreieck, worin BA = AC, so entstehen folgende drei Fälle:

I. Fall.

Gegeben: AB = AC und BC;
Gesucht: W. BAC, und W. B = W. C.

II. Fall.

Gegeben: AB = AC, und W. BAC, oder
AB = AC und W. B = W. C;

Gesucht: BC und W. B = W. C, oder BC und W. BAC.

III. Fall.

Gegeben: BC und W. BAC, oder BC und W. B = W. C;

Gesucht: AB = AC und W. B = W. C, oder AB = AC und W. BAC.

§. 407.

Aufgabe. Die Fälle, welche bei dem gleichschenkeligen Dreiecke eintreten können, aufzulösen.

Auflösung. Wenn man von der Spitze A ein Loth AD auf die Grundlinie BC zieht, so ist bekannt, daß sowohl letztere, als auch der Winkel an der Spitze, in zwei gleiche Theile getheilt wird. Auch entstehen in dem gleichschenkeligen Dreiecke die rechtwinkeligen congruenten Dreiecke ADB und ADC. Hieraus ergibt sich Folgendes:

Für den I. Fall.

Da BC gegeben ist, so ist auch BD = DC bekannt, und durch die Proportion AB : BD = Sehne W. 90° : Sehne W. BAD wird aus den bekannten drei ersten Gliedern der Winkel BAD gefunden. Dieser verdoppelt, ist der W. BAC, und letzterer von 180° abgezogen, gibt zum Reste die Summe der gleichen Winkel B und C, deren Hälfte also = W. B = W. C ist.

Für den II. Fall.

Wenn AB = AC, und W. BAC bekannt ist, so halbire man diesen Winkel, um W. BAD = W. CAD zu finden. Schließt man nun:

Sehne W. 90° : Sehne W. BAD = AB : BD,

so wird hieraus BD gefunden, welches, doppelt genommen, die zu findende Grundlinie BC gibt.

Wäre AB und W. B = W. C gegeben, so subtrahire man W. B von 90°, um W. BAD zu finden, und verfahre nun, wie vorhin.

Für den III. Fall.

Es sei BC und W. BAC bekannt, so halbire man beides, um BD und W. BAD zu finden. Setzt man nun die Proportion:

Sehne W. BAD : Sehne W. 90° = BD : AB,

so wird AB als viertes Glied gefunden.

Wäre BC und W. B = W. C gegeben, so ziehe man W. B von 90° ab, um W. BAD zu erhalten, und verfahre nun wie vorhin.

§. 408.

Anmerkung. Es ist nöthig, daß der Anfänger zu allen diesen Fällen mehrere Beispiele berechne, welche hier, um nicht zu weitläufig zu werden, übergangen worden sind.

§. 409.

Anmerkung. Auch sieht man leicht, wie in dem gleichschenkeligen Dreiecke, aus den vorhin gegebenen Stücken, dessen Höhe und durch diese auch sein Inhalt

berechnet werden kann. Diese Uebung ist den Anfängern sehr zu empfehlen.

C) Vom Dreiecke überhaupt.

§. 410.

Aufgabe. Die Fälle zu entwickeln, welche bei dem Dreiecke überhaupt möglich sind, um aus den gegebenen Stücken die fehlenden zu berechnen.

Auflösung. Da wenigstens eine Seite gegeben seyn muß, und bei zwei gegebenen Winkeln des Dreiecks der dritte Winkel auch leicht bekannt ist, so entstehen folgende vier Fälle:

I. Aus einer Seite und den zwei Winkeln;

II. Aus zwei Seiten und einem Winkel, welcher der einen Seite gegenüberliegt;

III. Aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel;

IV. Aus allen drei Seiten die fehlenden Stücke zu finden.

Diese vier Aufgaben sollen nun, der Ordnung nach, allgemein aufgelößt werden.

§. 411.

Aufgabe. Aus einer Seite und zwei Winkeln die fehlenden Stücke in dem Dreiecke zu finden.

Es sei (Fig. 160.) DEF das Dreieck, worin, ausser EF, noch zwei Winkel gegeben sind. Man soll das Uebrige finden.

Auflösung. I. Da zwei Winkel gegeben sind, so wird der dritte gefunden, wenn man die Summe der gegebenen von 180° abzieht,

II. Um ED zu finden, schließe man:

Sehne W. D : Sehne W. F = EF : ED,

woraus $ED = \frac{\text{Sehne W. F} \times EF}{\text{Sehne W. D}}$ wird,

III. Desgleichen wird FD durch:

Sehne W. D : Sehne W. E = EF : FD die Seite FD gefunden, und $FD = \frac{\text{Sehne W. E} \times EF}{\text{Sehne W. D}}$.

§. 412

Aufgabe. Aus zwei Seiten und einem Winkel, welcher der einen Seite gegenübersteht, die fehlenden Stücke im Dreiecke zu finden.

Es sei (Fig. 160.) DE, EF und W. D, oder DE, EF und W. F gegeben. Man sucht W. F, W. E und DF, oder W. D, W. E und DF.

Auflösung. I. Aus EF : ED = Sehne W. D : Sehne W. F, wird Sehne W. F $= \frac{ED \times \text{Sehne W. D}}{EF}$.

II. W. E = 180° — (W. D + W. F.)

III. Auf ähnliche Weise wird aus DE, EF und W. F das noch Fehlende gefunden.

§. 413.

Aufgabe. Aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel die übrigen Stücke des Dreiecks durch Rechnung zu finden.

Es sei DEF (Fig. 160.) das gegebene Dreieck, worin man aus DE, EF und W. E die übrigen Stücke berechnen soll.

Auflösung. I. Entweder ist der W. E ein spitzer, oder ein rechter, oder ein stumpfer Winkel. Der II. Fall ist oben bei den rechtwinkeligen Dreiecken aufgelößt worden.

II. Ist aber W. E (Fig. 161.) ein spitzer, so *theilt* das Loth DG das Dreieck EDF in zwei rechtwinkelige Dreiecke DGE und DGF. In jenem kann man aus W. E den W. EDG, und aus diesem und der Hypotenuse ED die Linie EG leicht finden. Diese von EF abgezogen, läßt GF übrig. Da aber auch in dem Dreiecke DGE das Loth DG auf doppelte Weise berechnet werden kann, so sind in dem Dreiecke DGF die zwei Catheten DG und GF bekannt, woraus man sowohl die Linie DF, als auch den W. F berechnen kann. Aus den Winkeln E und F findet man sodann noch den W. EDF.

III. Wenn W. DEF (Fig. 162.) ein stumpfer ist, so fällt das Loth DG auf die über E verlängerte FE, und man kann in dem rechtwinkeligen Dreiecke DGE aus DE und W. DEG (der durch seinen Nebenwinkel DEF bekannt ist) sowohl DG als GE berechnen. Wird GE zu EF addirt, so kennt man in dem

rechtwinkeligen Dreiecke DGF die Catheten DG und GF, woraus man sowohl den W. F als auch DF berechnen kann. Aus W. DEF und W. F findet man endlich noch W. EDF.

§. 414.

Aufgabe. Aus drei gegebenen Seiten eines Dreiecks, die demselben zugehörigen Winkel zu berechnen.

Es sei (Fig. 163.) ABC das gegebene Dreieck und AB, BC und CA die gegebenen Größen. Man soll die Winkel A, B und C finden.

Auflösung. I. Das gegebene Dreieck ist entweder gleichseitig, gleichschenkelig oder ungleichseitig. Im ersten Falle ist jeder Winkel = 60°. Im zweiten werden die Winkel nach §. 407 berechnet.

II. Im dritten Falle werde mit der kleinsten Seite AB aus A der Kreis FBDEF beschrieben und CA bis F verlängert, auch FB und ED nebst dem Lothe AG gezogen, so ist, da W. EDC + W. EDB = 180° = W. EDB + W. BFE (§. 146.) auch W. EDC = W. BFE. Folglich sind die Dreiecke EDC und BFC ähnlich (§. 203.) und BC : FC = EC : DC.

III. Da nun BC, FC (= BA + AC) und EC (= AC — AB) drei bekannte Größen sind, so wird DC durch Rechnung gefunden. Da BC — DC = BD und BG = $\frac{1}{2}$ BD, so ist auch sowohl BG als GC bekannt.

IV. Nun kann man im rechtwinkeligen Dreiecke AGB aus BA und BG den W. ABG, und im rechtwinkeligen Dreiecke AGC aus CA und CG den W. C leicht finden. Sind aber diese beide Winkel bekannt, so ist es auch der W. BAC.

§. 415.

Anmerkung. Es wird wiederholt erinnert, daß es durchaus nothwendig ist, alle diese Fälle durch mehrere Beispiele zu erläutern, um den Anfänger nicht nur theoretisch, sondern auch practisch zu üben.

V. Vordersätze zur Trigonometrie, auf die Sinusse, Tangenten und Secanten gegründet.

§. 415. *a.*

Erklärung. In dem, aus dem Mittelpuncte C (Fig. 166.) mit dem Halbmesser CA beschriebenen Kreise seien AE und DG zwei auf einander lothrecht stehende Durchmesser und ∢ ACB < R. Zieht man aus B die BI senkrecht auf CA, so wird dieses Loth der Sinus des Winkels ACB oder auch der Sinus des Bogens BA genennt und durch sin. ∢ ACB oder sin. ∢ x bezeichnet. Das Zeichen ∢ bedeutet von nun an: Winkel.

§. 415. *b.*

Zusatz. I. Wenn man den Sinus BI nach H verlängert und den Radius CH zieht, so ist △ BIC

$\cong \triangle$ HIC und daher BI $=$ HI, so wie auch $\angle$ HCI $= \angle$ BCI. Daher ist der Sinus eines Bogens der halben Sehne des doppelten Bogens gleich.

II. Wenn der $\angle\, x$ größer wird, so nimmt auch sein Sinus an Größe zu, bis $\angle\, x =$ R ist, wo denn DC der Sinus von $\angle$ ACD oder vom Bogen ABD wäre. Daher ist der Sinus eines rechten Winkels dem Halbmesser des durch seine Oeffnung beschriebenen Quadranten gleich. Weil dieser Radius der größte Sinus im Kreise ist, so wird er auch der Sinus totus genennt und mit Sin. tot. bezeichnet.

III. Wird der Winkel ACK $>$ R, so ist das Loth KL sein Sinus, welcher hier von K auf den rückwärts verlängerten Halbmesser CA fällt. Wenn nun $\angle\, o = \angle\, u$ ist, so muß auch $\angle\, y = \angle\, x$ und folglich KD $=$ BI seyn. Auch ist $\angle$ ACB soviel weniger als ein rechter, soviel $\angle$ ACK mehr als ein rechter ist. Daher haben zwei Nebenwinkel einerlei Sinus.

IV. Wird der Winkel ein auswärtsgehender z. B. $\angle$ ACF, zu welchem der Bogen ABDKEF gehört, so ist FL dessen Sinus und wenn $\angle\, v = \angle\, y$ wäre, so ist auch FL $=$ KL. Daher haben jene Winkel, wovon einer soviel unter 2 R, als dem andern über 2 R zu seinem Maße hat, wiederum den nämlichen Sinus.

V. Rückte der Punct F nach H und dächte man sich unter $\angle$ ACH einen auswärtsgehenden Winkel, dessen Maß der Bogen ADEGH ist, so wird HI sein

Sinus. Für $\asymp r = \asymp v = \asymp x$, ist auch HI = FL = BI und es ist wieder erwiesen, daß zwei Winkel, wovon der eine um so viel kleiner, als der andere größer als 3R ist, d. h. der auswärtsgehende Winkel ACF und der auswärtsgehende Winkel ACH den nämlichen Sinus haben.

§. 415. *c.*

Erklärung. Um die durch die zwei lothrecht stehende Durchmesser AE und DG entstandenen vier Quadranten bequemer zu bezeichnen, nennt man ACD den ersten; DCE den zweiten; ECG den dritten und GCA den vierten Quadranten. Die auf AE lothrecht stehenden Sinusse im ersten und zweiten Quadranten heissen die positiven; die Sinusse im dritten und vierten Quadranten aber, ihrer entgegengesetzten Lage wegen, die negativen.

§. 415. *d.*

Zusatz. I. Im ersten Quadranten wachsen die positiven Sinusse mit ihren Bogen, bis sin. R = sin. tot. Im zweiten Quadranten bleiben die Sinusse positiv; nehmen aber stufenmäßig ab, bis sin. 2R = 0 ist. Im dritten Quadranten wachsen die Sinusse wieder; werden aber negativ, bis sin. 3R = sin. tot. Im vierten Quadranten werden die negativen Sinusse wieder mit ihren Winkeln kleiner, bis sin. 4R = o ist.

II. Auch folgt hieraus, daß sin. $(4R + \asymp x) =$ BI; sin. $(4R + \asymp ACK) =$ KL; sin. $(4R + \asymp$

ACF) = FL; sin. (4R + ACH) = HI ist und daß eben dieses auch für nR gilt.

§. 415. *e*.

Erklärung. I. Unter der Ergänzung oder dem Complemente eines spitzen Winkels versteht man jenen spitzen Winkel, welcher ihm beigefügt werden muß, um mit ihm einen Rechten zu bilden. Der beizufügende Winkel heißt der Ergänzungswinkel. Wenn (Fig. 167.) ∡ ACE = R, so ist ∡ o der Ergänzungswinkel von ∡ x; aber auch umgekehrt dieser der Ergänzungswinkel von jenem.

II. Unter dem Cosinus eines Winkels versteht man den Sinus seines Ergänzungswinkels. Da sin. x = BN und sin. o = BD, so ist BN der Cosinus des ∡ o und BD der Cosinus des ∡ x. Da nun BN = DC und BD = NC ist, so ist auch DC der Cosinus von ∡ o und NC der Cosinus von ∡ x. Man bezeichnet den Cosinus durch cos. und setzt z. B. cos. ∡ x = BD = NC.

§. 415. *f*.

Zusatz. I. Da jeder der beiden spitzen Winkel im rechtwinkeligen Dreiecke der Ergänzungswinkel des andern ist, so kann jede Cathete dieses Dreiecks als Sinus des ihr gegenüberstehenden und als Cosinus des ihr anliegenden Winkels betrachtet werden. So ist z. B. BN = sin. ∡ x und BN = cos. ∡ y; ferner ist NC = sin. ∡ y und NC = cos. ∡ x.

II. Im ersten Quadranten nehmen die Cosinusse ab, wenn die Winkel zunehmen. Denn wenn ∡ x größer wird, so muß ∡ o und folglich auch BD = NC kleiner werden. Auch ist cos. ∡ o (Null) = sin. R = AC und cos. R = o (Null).

III. Im zweiten Quadranten nehmen die Cosinusse wieder zu, wenn die Winkel wachsen. Es ist z. B. cos. ∡ ACF = FD. Allein dieser Cosinus ist negativ, da er gegen BD, in Bezug auf den Durchmesser EK, worauf alle Cosinusse lothrecht stehen, eine entgegengesetzte Lage hat. Auch ist cos. 2R = MC = sin. tot.

IV. Im dritten Quadranten bleiben die Cosinusse negativ; werden aber, bei zunehmenden Winkeln, wieder kleiner und es ist z. B. cos. ∡ ACH (welchem der Bogen ABEFH entspricht) = HI. Auch ist cos. 3R = o (Null.).

V. Im vierten Quadranten sind die Cosinusse wieder positiv und nehmen mit den Winkeln zu. So ist z. B. cos. ∡ ACL (dessen Maß der Bogen AEMKL ist) = LI. Endlich wird cos. 4R = sin. tot. = AC.

VI. Auch folgt hieraus, daß zwei Winkel, wovon jeder um gleichviel mehr oder weniger ist, als R, oder als 2R, oder als 3R u. s. f. einerlei Cosinus haben.

§. 415. *g*.

Erklärung. Die Linie AN, welche in Bezug auf den ∡ x, der Unterschied des Radius AC und des Cosinus NC ist, heißt der Sinusversus

oder Quersinus dieses Winkels x und wird durch sin. vers. ∡ x bezeichnet. Für ∡ o ist DE Sinusversus; daher heißt nun DE auch Cosinusversus des ∡ x, so wie AN der Cosinusversus von ∡ o ist.

§. 415. *h*.

Anmerkung. Das Ab= und Zunehmen des Quersinus durch die vier Quadranten, so wie auch seine positive und negative Lage in denselben wird nun leicht anzugeben seyn.

§. 415. *i*.

Erklärung. Die gerade Linie AD (Fig. 168.) welche auf dem Radius CA in A lothrecht steht, und von dem Schenkel CD des Winkels o in D geschnitten wird, heißt die Tangente dieses Winkels und wird durch tang. ∡ o bezeichnet; die Linie CD aber, welche die Tangente AD in D schneidet, wird des Winkels o Secante genennt und durch sec. ∡ o bezeichnet. Auf ähnliche Art ist BE die Tangente und BC die Secante des Winkels x. Da aber x der Ergänzungswinkel von o und o der Ergänzungswinkel von x ist, so ist BE die Cotangente und BC die Cosecante des ∡ o; so wie auch AD die Cotangente und DC die Cosecante des ∡ x ist. Man bezeichnet sie durch cot. und cosec.

§. 415. *k*.

Zusatz. I. Im ersten Quadranten nehmen die Tangenten und Secanten mit den Bogen zu, bis für R beide unendlich groß werden, da sie nun Pa=

rallellinien sind. Auch ist ihre Lage hier eine positive. Die Cotangenten und Cosecanten nehmen in diesem Quadranten ab, bis cosec. R = o ist.

II. Im zweiten Quadranten werden Tangenten und Secanten, bei zunehmenden Winkeln, wieder kleiner und bekommen eine negative Lage, da z. B. tang. ∠ ACG = AM und sec. ∠ ACG = CM ist. Für 2R ist die Tangente = o (Null). Auf ähnliche Weise läßt sich dieses Größer- und Kleinerwerden, diese abwechslende positive und negative Lage für die übrigen Quadranten und für die Cotangenten und Cosecanten leicht durchführen.

III. Auch haben zwei Winkel, welche um dasselbige größer oder kleiner sind, als R, oder als 2R, 3R u. s. f. wiederum einerlei Tangente, Secante, Cotangente und Coseçante.

§. 415. *l.*

Lehrsatz. Die bisher erklärten trigonometrischen Linien stehen, bei einerlei Winkel und verschiedenen Halbmessern, im geraden Verhältnisse dieser Halbmesser.

Beweis. Es seien (Fig. 169.) in der Fläche des spitzen Winkels GCF mit den Radien CA und CE die Bogen AQ und EM beschrieben und die Lothe QB, AP, MD, EN gezogen, so sind die Dreiecke NEC, MDC, PAC, QBC einander ähnlich und es ist, in Bezug auf ∠ x,

1. Für die Sinusse : QB : MD = CQ : CM,
2. Für die Cosinusse : CB : CD = CQ : CM,
2. Für die Tangenten : PA : NE = CA : CE,
4. Für die Secanten : PC : NC = CA : CE,

Da CA : CE = CB : CD ist, so wird auch CA — CB : CA = CE — CD : CE oder

5. Für die Quersinusse : AB : ED = CA : CE.

Wird der Ergänzungswinkel y construirt und werden nun die Cotangenten und Cosecanten des ∢ x gebildet, so geht ebenfalls aus der Aehnlichkeit der Dreiecke hervor, daß auch diese Linien im geraden Verhältnisse der Radien CA und CE stehen.

§. 415. *m*.

Zusatz. I. Wenn daher für ∢ x der Sinus QB ein bestimmter Theil vom Radius CA ist, so muß auch der Sinus MD der nämliche Theil des Halbmessers CE seyn. Eben dieses gilt von den übrigen Linien.

II. Hierin liegt auch der Grund, daß die Größe eines Winkels, z. B. des ∢ x sowohl durch seinen Sinus, als auch durch seinen Cosinus, oder durch seine Tangente, Secante, Cotangente, Cosecante, so wie auch durch seinen Quersinus bestimmt oder gemessen werden kann.

III. Wie früher die Sehnen zum Maße der ihnen zugehörigen Winkel sind angewendet worden, so dienen hier diese trigonometrischen Linien zu gleichem Zwecke.

§. 415. *n.*

Aufgabe. Aus dem bekannten Verhältnisse des Sinus eines Winkels zu dem Halbmesser des Kreises (sin. x : r) das Verhältniß der übrigen trigonometrischen Linien zu ebendiesem Halbmesser zu bestimmen.

Auflösung. I. Da (Fig. 169.) $BC^2 = QC^2 - QB^2$ ist, so ist $(\cos. x)^2 = r^2 - (\sin. x)^2$. Daher kann der Cosinus eines Winkels berechnet werden, wenn man seinen Sinus kennt.

II. Da $AB = AC - BC$, so ist $\sin. \text{vers.}\ x = r - \cos. x$, wodurch nun auch der Quersinus berechnet werden kann.

III. Weil $CB : BQ = CA : AP$, so ist $AP = \frac{BQ \times CA}{CB}$ d. h. $\text{tang.}\ x = \frac{\sin\ x \times r}{\cos. x}$, wodurch die Größe der Tangente bestimmt werden kann.

IV. Aus $CB : CQ = CA : CP$ wird $CP = \frac{CQ \times CA}{CB}$ oder $\sec. x = \frac{r^2}{\cos. x}$. Ferner ist $BQ : QC = AP : PC$, folglich $PC = \frac{QC \times AP}{BQ}$. Daher ist auch $\sec. x = \frac{r \times \text{tang.}\ x}{\sin. x}$, wodurch die Secante auf doppelte Art berechnet werden kann.

V. Da, wegen $\angle RSC = \angle QCB$, das Dreieck SRC dem Dreiecke CBQ ähnlich ist, so hat man auch $QB : BC = CR : RS$; folglich:

$$RS = \frac{BC \times CR}{QB} \text{ d. h. } \cot. x = \frac{\cos. x \times r}{\sin. x},$$

wodurch die Cotangente des ∢ x bestimmt werden kann.

VI. Ferner ist auch BQ : CQ = RC : CS daher $CS = \frac{CQ \times RC}{BQ}$, oder $\text{cosec. } x = \frac{r^2}{\sin. x}$.

Da aber auch BC : CQ = RS : SC, so ist noch $CS = \frac{CQ \times RS}{BC}$, oder $\text{cosec. } x = \frac{r \times \cot. x}{\cos. x}$.

VII. Nimmt man den Halbmesser zur Einheit an, so wird r = 1 und man erhält folgende Werthe:

1) $\cos. x = \sqrt{(1 - (\sin. x)^2)}$

2) $\sin. \text{vers. } x = 1 - \cos. x$

3) $\text{tang. } x = \frac{\sin. x}{\cos. x}$

4) $\sec. x = \frac{1}{\cos. x}$, oder auch

$\sec. x = \frac{\text{tang. } x}{\sin. x}$

5) $\cot. x = \frac{\cos. x}{\sin. x}$

6) $\text{cosec. } x = \frac{1}{\sin. x}$, oder auch

$\text{cosec. } x = \frac{\cot. x}{\cos. x}$,

welche ebenfalls aus dem bekannten sin. x berechnet werden können.

§. 415. *o.*

Zusatz. I. Wäre ∡ BCH (Fig. 166.) = 60°, so müßte BCH ein gleichseitiges Dreieck und folglich BH = BC = r seyn. Hier ist nun BI = $\frac{1}{2}$ r = sin. x; d. h. der Sinus eines Winkels von 30° ist der Hälfte des Halbmessers gleich.

II. Wäre ∡ BCN (Fig. 168.) = R, so wäre auch, weil ∡ DAC = ∡ MAC = R, ∡ CDA = ∡ CMA = $\frac{1}{2}$ R und daher DA = AC. Da nun DA = tang. o, so ist die Tangente eines Winkels von 45° immer dem Halbmesser des Kreises gleich.

III. In der oben (§. 392 und 393) erklärten Sehnentafel war der Durchmesser in 10000000 gleiche Theile getheilt angenommen und die Tabelle gibt die Menge dieser Theilchen für die Sehnen der in ihr enthaltenen Winkel, von fünf zu fünf Minuten, für alle Winkel von 5′ bis zu 90° an. Da nun die Hälften dieser Sehnen die Sinusse eben dieser Winkel sind (§. 415. *b.* I.) so enthält jene Tabelle auch die doppelten Sinusse für den Durchmesser = 10000000 und daher auch die Sinusse selbst für den Halbmesser = 10000000. Nimmt man diesen Radius, als Sinustotus, in 10000000 gleiche Theile getheilt an, so ist z. B. sin. 9° 15′ = 1607426; sin. 59° 45′ = 1638355; sin. 80° 30′ = 9862856 u. s. f. Gleichwie daher oben (§. 388 u. f.) im Allgemeinen die Möglichkeit, jene Sehnen zu berechnen, erklärt worden ist, so ist hierdurch auch die Möglichkeit nachgewiesen, die Sinusse zu

berechnen und durch diese auch die übrigen trigonometrischen Linien. Die weitere Ausführung dieser Berechnung muß aber hier übergangen werden.

IV. Um zu zeigen, wie aus dem Sinus eines Winkels seine übrigen Functionslinien berechnet werden, sollen folgende Beispiele in Zahlen zur Erläuterung dienen.

Da sin. 38° = 6156615 ist, so wird:

1. cos. 38° = $\sqrt{(r^2 - (\text{sin. } 38°)^2)}$ (§. 415. n. I.) oder cos. 38° = $\sqrt{(10000000^2 - 6156615^2)}$ = $\sqrt{(100000000000000 - 37903908258225)}$ = $\sqrt{62096091741775}$ = 7880107.

2. sin. vers. 38° = r — cos. 38° (§. 415. n. II.) oder sin. vers. 38° = 10000000 — 7880107 = 2119893.

3. tang. 38'' = $\frac{\text{sin. } 38° \times r}{\text{cos. } 38°}$ (§. 415. n. III.)

oder tang. 38° = $\frac{6156615 \times 10000000}{7880107}$ = 7812857.

4. sec. 38° = $\frac{r^{\circ}}{\text{cos. } 38°}$ oder auch sec. 38° = $\frac{\text{tang. } 38° \times r}{\text{sin. } 38°}$. (§. 415. n. IV.)

Dieses gibt nun in Zahlen:

sec. 38° = $\frac{100000000000000}{7880107}$ = 12690183, oder

sec. 38° = $\frac{7812856 \times 10000000}{6156615}$ = 12690181

5. $\cot. 38° = \frac{\cos. 38° \times r}{\sin. 38°}$ (§. 415. n. V.)

folglich $\cot. 38° = \frac{78801070000000}{6156615} = 12799415.$

6. $\text{cosec}. 38° = \frac{r^2}{\sec. 38°}$ oder
$\text{cosec}. 38° = \frac{\cot. 38° \times r}{\cos. 38°}.$ (§. 415. n. VI.)

Hierdurch wird: $\text{cosec}. 38° = \frac{100000000000000}{6156615}$
$= 16242691$, oder auch
$\text{cosec}. 38° = \frac{127994150000000}{7880107} = 16245491$, wodurch diese Functionslinien sehr genau bestimmt sind.

§. 415. *p*.

Erklärung. I. Unter trigonometrischen Tafeln versteht man eine Zusammenstellung von Winkeln und den dazu gehörigen logarithmischen Linien; so, daß zu jedem gegebenen Winkel sehr leicht die ihm zukommende trigonometrische Linie und umgekehrt auch zu jeder solchen Linie der ihr angehörige Winkel gefunden werden kann. Der Radius oder Sinustotus ist gewöhnlich in 10000000 gleiche Theilchen getheilt angenommen, nach welchen die Größe jener logarithmischen Linien bestimmt ist. So ist z. B. sin. 30° = 50000000 und tang. 45° = 10000000 dieser Theilchen. Die Werthe aller übrigen sind Irrationalzahlen.

II. Diese, in Theilchen des Halbmessers ausgedrückte trigonometrische Linien heissen die natürlichen und die Tafeln enthalten gewöhnlich die natürlichen Sinusse und die natürlichen Tangenten, welchen auch bisweilen (wie in den bekannten Vlacq'schen Tafeln) noch die Secanten beigefügt sind. Da aber die trigonometrischen Rechnungen weit bequemer durch Logarithmen geführt werden, so hat man auch die Logarithmen der Sinusse und die Logarithmen der Tangenten berechnet und in diese Tafeln aufgenommen. Diese werden die künstlichen trigonometrischen Linien genennt.

§. 415. *q*.

Anmerkung. I. Die nähere Einrichtung und der Gebrauch dieser trigonometrisch = logarithmischen Tafeln kann hier nicht weiter erklärt werden. Daher bleibt dieses entweder der mündlichen Anleitung des Lehrers oder der schriftlichen Belehrung überlassen, welche bisweilen solchen Tafeln beigefügt ist. Der Vfr. gegenwärtiger Schrift hat zum bequemen Gebrauche bei dem öffentlichen und privat Uuterrichte solche neu eingerichtete logarithmische und trigonometrischen Tafeln so eben herausgegeben, welche ihrer Correctheit und Wohlfeilheit wegen, sich allen Liebhabern der Mathesis und besonders den öffentlichen Lehranstalten zu empfehlen suchen. Sie sind im Verlage dieser geometrischen Wissenschaftslehre erschienen.

II. Auf diese Vorbereitungslehren können nun die wirklichen trigonometrischen Aufgaben folgen, welche nach den oben (§. 400, §. 406 und §.410.) entwickelten Fällen durchgeführt werden.

VI. Anwendung auf die Berechnung der fehlenden Stücke des Dreiecks.

A. Rechtwinkelige Dreiecke.

§. 415. *r.*

Aufgabe. I. In einem rechtwinkeligen Dreiecke ist die Hypotenuse und ein spitzer Winkel gegeben. Man soll die Größe jeder der beiden Catheten finden.

Auflösung. I. In dem rechtwinkeligen Dreiecke ABC (Fig. 158.) sei AC und $\measuredangle$ A gegeben, so ist $\measuredangle C = R - \measuredangle A$.

II. Denkt man sich nun aus C mit CA einen Kreisbogen beschrieben, welcher die über B verlängerte CB schneidet, so ist AB = sin. C. Daher hat man

r : sin. C = AC : AB, folglich

$$1.\ AB = \frac{\sin. C \times AC}{r} \text{ und auch}$$

2. Log. AB = Log. sin. C + Log. AC — Log. r, wodurch AB auf doppelte Weise gefunden werden kann.

III. Es sei z. B. AC = 18° 4′ und A = 36° 15′, so ist C = 53° 45′ und man hat

$$1.\ AB = \frac{8064446 \times 184'}{10000000} = \frac{1483858064}{10000000},$$

= 148,3858064 d. h. AB = 14° 8′ 3″ 8‴ . . .

$$\left.\begin{array}{r} 2.\ \text{Log. sin. } 53^\circ\ 45' = 9{,}9065745 \\ \text{Log. } 184 = 2{,}2648178 \end{array}\right\}\ \text{add.}$$

$$12{,}1713923$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Log. r} = 10 \\ \text{Log. AB} = 2{,}1713923. \end{array}\right\}\ \text{subtr.}$$

Sucht man diesen Logarithmen in den Tafeln, so findet sich AB = 148′, 3 = 14° 8′ 3″ wie oben.

IV. Um CB zu finden, denke man sich aus A mit AC einen Kreisbogen, welcher die über B verlängerte AB schneidet, so ist CB = sin. A und man hat wieder

r : sin. A = AC : CB, folglich.

$$1.\ CB = \frac{\text{sin. } A \times AC}{r} \text{ und}$$

$$2.\ \text{Log. CB} = \text{Log. sin. A} + \text{Log. AC} - \text{Log. r.}$$

Die wirkliche Rechnung gibt

$$1.\ CB = \frac{5913096 \times 184}{10000000} = \frac{1088009664}{10000000} =$$

108,8009664 d. h. CB = 10° 8′ 8″...

$$\left.\begin{array}{r} 2.\ \text{Log. sin. } 36^\circ\ 15' = 9{,}7718150 \\ \text{Log. } 184 = 2{,}2648178 \end{array}\right\}\ \text{add.}$$

$$12{,}0366328$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Log. r} = 10 \\ \text{Log. CB} = 2{,}0366328 \end{array}\right\}\ \text{subtr.}$$

Da zu diesem Logarithmen die Zahl 1088 gehört, so ist CB = 108,8 = 10° 8′ 8″ wie vorhin.

V. Wenn man (nach III.) die Größe von CB gefunden hat, so läßt sich, für einen aus C mit CB beschriebenen Bogen, die BA als tang. C betrachten und es ist

r : tang. A = AB : BC, daher

1. $BC = \frac{\text{tang. } A \times AB}{r}$ oder auch

2. Log. BC = Log. tang. A + Log. AB — Log. r.

Diese Rechnung gibt Folgendes

1. $BC = \frac{7332303 \times 1483''}{10000000} = \frac{10873805349}{10000000}$ = 1087,3805349 d. h. BC = 10° 8′ 7″ 3‴... beinahe wie vorhin (in IV.)

2. Log. tang. A = 9,8652404 } add.
Log. 1483 = 3,1711412

13,0363816

Log. r = 10 subtr.

Log. BC = 3,0363816

Da nun dieser Log. zur Zahl 1087 gehört, so ist BC = 10° 8′ 7″ wie vorhin.

§. 415. *s.*

Aufgabe. II. In einem rechtwinkeligen Dreiecke ist eine Cathete und ein spitzer Winkel gegeben. Man soll die andere Cathete und die Hypotenuse finden.

Auflösung. I. Es sei in demselbigen Dreiecke ABC (Fig. 158.) AB und ∡ A gegeben, so ist ∡ C = R — ∡ A.

II. Wird aus A mit AB ein Kreisbogen beschrieben, so ist BC = tang. A und man hat

r : tang. A = AB : BC; daher ist

1. $BC = \frac{tang. A \times AB}{r}$ oder auch

2. Log. BC = Log. tang. A + Log. AB — Log. r

III. Um AC zu finden, setze man r : sec. A = AB : AC. Daher ist

1. $AC = \frac{sec. A \times AB}{r}$, oder auch

1. Log. AC = Log. sec. A + Log. AB — Log. r.

Die wirkliche Berechnung dieser Fälle in Zahlenbeispielen wird hier, um nicht zu weitläufig zu werden, übergangen.

§. 415. *t.*

Aufgabe. III. In einem rechtwinkeligen Dreiecke ist die Hypotenuse und eine Cathete gegeben. Man soll die beiden spitzen Winkel finden.

Auflösung. I. Es sei in dem rechtwinkeligen Dreiecke ABC (Fig. 158.) AC und AB gegeben, so ist, wenn man mit CA aus C einen Kreisbogen beschreibt, AB der Sinus des ∠ C, und man hat AC : AB = r : sin. C; folglich ist

1. $sin. C = \frac{AB \times r}{AC}$ und

2. Log. sin. C = Log. AB + Log. r — Log. AC, woraus der Sinus des ∠ C, und durch diesen

auch der ∠ C selbst gefunden wird. Sodann wird ∠ A = R — ∠ C.

II. Um nun BC zu finden, setze man entweder r : sin. A = AC : CB, welches

$$1.\ CB = \frac{\text{sin. } A \times AC}{r} \text{ oder}$$

2. Log. CB = Log. sin. A + Log. AC — Log. r gibt; oder man schließe so r : tang. A = AB : BC, woraus

$$1.\ BC = \frac{\text{tang. } A \times AB}{r} \text{ oder}$$

2. Log. BC = Log. tang. A + Log. AB — Log. r wird.

§. 415. *u.*

Aufgabe. IV. In einem rechtwinkeligen Dreiecke sind die beiden Catheten gegeben. Man soll die Hypotenuse und die spitzen Winkel finden.

Auflösung. I. Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 158.) AB und BC gegeben. Man soll AC, ∠ A und ∠ C finden. Beschreibt man mit CB aus C einen Kreisbogen, so ist BA = tang. C und man hat: CB : BA = r : tang. C, folglich

$$1.\ \text{tang. } C = \frac{BA \times r}{CB}, \text{ oder auch}$$

2. Log. tang. C = Log. BA + Log. r — Log. CB, wodurch nun der ∠ C bekannt wird und durch ihn auch der ∠ A.

II. Um AC zu finden, setze man r : sec. C = CB : CA, also

1. $CA = \frac{\text{sec. } C \times CB}{r}$, oder auch

2. Log. CA = Log. sec. C + Log. CB — Log. r, nach welchen Ausdrücken nun ebenfalls leicht Beispiele berechnet werden können.

B) Gleichschenkelige Dreiecke.

§. 415. v.

Aufgabe. I. In einem gleichschenkeligen Dreiecke ist die Grundlinie und einer der gleichen Schenkel gegeben. Man soll die Winkel finden.

Auflösung. I. Es sei in dem gleichschenkeligen Dreiecke BAC (Fig. 159.) BC und AB = AC gegeben. Man sucht ∠ B = ∠ C und ∠ BAC. Da das Loth AD das Dreieck BAC in die beiden congruenten rechtwinkeligen Dreiecke ABD und ACD theilt, so ist nunmehr: AC : $\frac{1}{2}$ CB = r : sin. $\frac{1}{2}$ CAB.

II. Daher hat man nun

1. $\text{sin. } \frac{1}{2} CAB = \frac{\frac{1}{2} CB \times r}{AC}$ und auch

2. Log. sin. $\frac{1}{2}$ CAB = Log. $\frac{1}{2}$ CB + Log. r — Log. AC. Daher ist nun ∠ CAB bekannt und durch diesen Winkel auch $\angle B = \angle C = \frac{2R - \angle CAB}{2} = R - \frac{1}{2} \angle CAB$.

§. 415. *w*.

Aufgabe. II. In einem gleichschenkeligen Dreiecke ist die Grundlinie und jeder der beiden Winkel gegeben. Man soll einen der gleichen Schenkel finden.

Auflösung. I. Es sei in demselbigen Dreiecke BAC (Fig. 159.) ausser BC noch ∡ BAC und ∡ B = ∡ C gegeben. Man sucht BA = AC. Hier ist nun in dem Dreiecke ADB : r : tang. B = BD : AD.

II. Somit wird nun

1. $AD = \frac{\text{tang. } B \times BD}{r}$ und auch

2. Log. AD = Log. tang. B + Log. BD — Log. r.

Ist nun AD bekannt, so wird die Hypotenuse AB nach dem Obigen (§. 415. u) gefunden.

§. 415. *x*.

Aufgabe. III. In einem gleichschenkeligen Dreiecke ist jeder der gleichen Schenkel nebst jedem der beiden Winkel an der Grundlinie gegeben. Man soll die Grundlinie finden.

Auflösung. I. Es sei in dem Dreiecke BAC (Fig. 159.) BA = AC und ∡ BAC oder ∡ B = ∡ C gegeben. Man sucht BC. Hier ist im Dreiecke ADC : r : sin. $\frac{1}{2}$ BAC = AC : CD.

II. Daher hat man entweder

1. $CD = \frac{\text{sin. } \frac{1}{2} BAC \times AC}{r}$, oder

2. Log. CD = Log. sin. $\frac{1}{2}$ BAC + Log. AC — Log. r. Kennt man nun CD, so ist auch CB = 2 CD bekannt.

§. 415. *y*.

Zusätz. Auch kann in jeder dieser drei Aufgaben (§. 415. v. w. x). Die Größe des Lothes AD berechnet werden. Da nuu $\frac{AD \times BC}{2}$ den Inhalt des Dreiecks BAC darstellt, so kann dieser Inhalt auch aus den oben (§. 415. v. w. x) gegebenen Stücken berechnet werden.

C) Dreiecke überhaupt.

§. 415. z.

Lehrsatz. In jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten wie die Sinusse der ihnen gegenüber liegenden Winkel.

Es sei ABD (Fig. 170.) das gegebene Dreieck, so soll bewiesen werden, daß
AB : BD : DA = sin. D : sin. A : sin. B ist.

Beweis. I. Da um jedes Dreieck ein Kreis beschrieben werden kann, so sei mit dem Radius CA dieser Kreis beschrieben und aus C seien die Lothe CGH, CEF nnd CNP auf BD, DA und AB, so wie auch die Halbmesser CA, CB, CD gezogen.

II. Nun ist ∠ MCD = ∠ BAD, ∠ FCA = ∠ DBA und ∠ PCB = ∠ ADB (§. 145, 146.); folglich DG = $\frac{1}{2}$ DB = sin. BAD, AE = $\frac{1}{2}$ AD

= sin. DBA und AN = $\frac{1}{2}$ AB = sin. ADB, woraus die Richtigkeit des Satzes hervorgeht.

III. Wenn in eine Seite des gegebenen Dreiecks der Mittelpunct des umschriebenen Kreises fällt, oder wenn der Mittelpunct ausserhalb des Dreiecks liegt, so läßt sich dieser Beweis auf ähnliche Art führen.

§. 415. *aa.*

Aufgabe. I. Aus einer Seite des Dreiecks und aus zwei Winkeln die übrigen Stücke zu finden.

Auflösung. I. Es sei (Fig. 160.) DEF das gegebene Dreieck, in welchem die Seite DE, der ∢ D und ∢ E gegeben ist. Man sucht ∢ F, Seite EF und Seite DF. Hier ist nun ∢ F = 2R — (∢ D + ∢ E), wodurch ∢ F bekannt wird.

II. Da nun (nach §. 415, z.) sin. F : sin. E = DE : DF, so ist

1. $DF = \frac{\text{sin. } E \times DE}{\text{sin. } F}$ und auch

2. Log. DF = Log. sin. E + Log. DE — Log. sin. F

III. Es sei z. B. DE = 24° 8′; ∢ D = 110° 12′; ∢ E = 43° 30′, so ist ∢ F = 180° — (110° 12′ + 43° 30′) = 26° 18′ und man hat

1. $DF = \frac{6883546 \times 2480''}{4430712} = \frac{17071194080}{4430712}$

= 3852″ = 38° 5′ 2″

$$\begin{array}{rll} 2.\ \text{Log. sin. } 43^\circ\ 30' = & 9{,}8378122 & \multirow{2}{*}{\Big\}\ \text{add.}} \\ \text{Log. } 248 = & \underline{2{,}3944517} & \\ & 12{,}2322639 & \Big\}\ \text{subtr.} \\ \text{Log. sin. } 26^\circ\ 18' = & \underline{9{,}6464735} & \\ \text{Log. DF} = & 2{,}5857904 & \end{array}$$

welchem Logarithmen die Zahl 385,2 zugehört. Daher ist DF = 38° 5′ 2″ wie vorhin.

III. Um nun noch EF zu finden, setze man die Proportion: sin. E : sin. D = DF : EF, also

1. $EF = \frac{\text{sin. D} \times \text{DF}}{\text{sin. E}}$ und auch

2. Log. EF = Log. sin. D + Log. DF — Log. sin. E. Daher wird nun

1. $EF = \frac{9384930 \times 3852''}{6883546} = \frac{36150750360}{6883546} =$ 5251 = 52° 5′ 1″.

$$\begin{array}{rll} 2.\ \text{Log. sin. } 110^\circ\ 12' = & 9{,}9724310 & \Big\}\ \text{add.} \\ \text{Log. } 385{,}1 = & \underline{2{,}5856863} & \\ & 12{,}5580173 & \Big\}\ \text{subtr.} \\ \text{Log. sin. } 43^\circ\ 30' = & \underline{9{,}8378122} & \\ \text{Log. EF} = & 2{,}7202051 & \end{array}$$

welcher Logarithme zur Zahl 5251 gehört. Daher ist auch nun EF = 52° 5′ 1″, wie zuvor.

IV. Auch hätte EF durch folgende Proportion gefunden werden können:
sin. F : sin. D = ED : EF; folglich

1. $EF = \frac{\text{sin. D} \times \text{ED}}{\text{sin. F}}$, oder

2. Log. EF = Log. sin. D + Log. ED — Log. EF. Werden beide Werthe in Zahlen berechnet, so erhält man dieselbigen Resultate, wie oben.

§. 415. *bb.*

Aufgabe. II. Aus zwei Seiten eines Dreiecks und einem gegenüberliegenden Winkel die fehlenden Stücke zu berechnen.

Auflösung. I. Es sei in dem Dreiecke (Fig. 160.) DF, DE und ∢ E gegeben. Man sucht ∢ D, ∢ F und Seite EF.

II. Hier ist nun: DF : DE = sin. E : sin. F. Daher

1. $\sin. F = \frac{DE \times \sin. E}{DF}$, oder

2. Log. sin. F = Log. DE + Log. sin. E — Log. DF, woraus sin. F und durch ihn der ∢ F leicht gefunden werden kann.

III. Um nun noch EF zu finden, berechne man zuerst den ∢ D = 180° — (∢ E + ∢ F) und setze nun die Proportion:

sin. F : sin. D = DE : EF, woraus

1. $EF = \frac{\sin. D \times DE}{\sin. F}$ oder auch

2. Log. EF = Log. sin. D + Log. DE — Log. sin. F wird und leicht berechnet werden kann.

IV. Auch hätte man folgende Proportion wählen können:

sin. E : sin. D = DF : EF, welches

1. $EF = \frac{\sin. D \times DF}{\sin. E}$, oder

2. Log. EF = Log. sin. D + Log. DF — Log. sin. E gibt.

§. 415. *cc.*

Anmerkung. I. Die Aufgabe: Aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel die übrigen Stücke des Dreiecks zu finden, kann zwar nach §. 413. auch **trigonometrisch** aufgelöset werden, wie man aus dem Bisherigen leicht ableiten wird; indessen gibt es hierzu noch eine bequemere Auflösungsart, welche sich auf folgende Hülfssätze stützt.

II. Der erste derselben ist diese Aufgabe: Aus der gegebenen Summe und Differenz zweier Zahlen diese Zahlen selbst zu finden. Es sey x die größere, y die kleinere derselben, s ihre Summe und d ihr Unterschied, so ist

$$s = x + y \text{ und}$$
$$d = x - y, \text{ folglich durch Addition}$$
$$s + d = 2x \text{ (weil } + y - y = 0\text{) und}$$
$$\frac{s + d}{2} = x = \frac{s}{2} + \frac{d}{2}$$

d. h. Man erhält die größere, wenn man die halbe Summe zur halben Differenz addirt.

Wird aber von $s = x + y$

$d = x - y$ subtrahirt,

so ist $s - d = 2y$ (weil $- y$ hinwegnehmen soviel heißt, als $+ y$ setzen)

folglich
$$\frac{s - d}{2} = y = \frac{s}{2} - \frac{d}{2}$$

d. h. die kleinere wird gefunden, wenn von der halben Summe die halbe Differenz abgezogen wird.

Wäre z. B. $s = 20$ und $d = 8$, so würde $x = 10 + 4 = 14$ und $y = 10 - 4 = 6$ seyn. Es ist auch wirklich $14 + 6 = 20$ und $14 - 6 = 8$.

Da $\frac{s}{2} - \frac{d}{2} = y$, so ist auch

$\frac{s}{2} - y = \frac{d}{2}$ d. h. wenn man von der halben Summe zweier Zahlen die kleinere wegnimmt, so bleibt ihre halbe Differenz zum Reste.

§. 415. *dd.*

Lehrsatz. In jedem Dreiecke verhält sich die Summe zweier Seiten zu ihrem Unterschiede wie sich die Tangente der halben Summe der ihnen gegenüberstehenden beiden Winkel zur Tangente des halben Unterschiedes eben dieser Winkel verhält.

Es sei (Fig. 171.) ABC das gegebene Dreieck, so soll bewiesen werden, daß CB + BA : CB — EA = tang. $\frac{1}{2}$ ∡ (BAC + BCA) : tang. $\frac{1}{2}$ ∡ (BAC — BCA).

Beweis. I. Man verlängere die Seite CB, welche dem größern der beiden Winkel, nämlich dem Winkel CAB entgegensteht, bis BD = BA, mache BE = BA, ziehe AE und DA, und verlängere letztere über A, bis das aus C auf sie gezogene Loth in F eintrifft.

II. Wegen DB = BA = BE ist ∡ DAE = R (§. 132.) daher CF mit EA gleichlaufend und DC : EC = DF : AF; oder AB + BC : BC — BA = DF : AF. Da nun, für CF als Halbmesser, DF die Tangente des ∡ DCF und AF jene des ∡

ACF ist, so hat man auch: $BC + BA : BC - BA = \text{tang. } DCF : \text{tang. } ACF$.

III. Nun ist ∡ BEA = ∡ BAE = $\frac{1}{2}$ ∡ DBA = $\frac{1}{2}$ ∡ $(BAC + ACB)$; folglich auch ∡ DCF = $\frac{1}{2}$ ∡ $(BAC + ACB)$ und ∡ DCF — ∡ ACB = $\frac{1}{2}$ ∡ $(BAC - ACB)$ (§. 415. bb. II.). Folglich ist auch $DF = \text{tang. } \frac{1}{2}$ ∡ $(BAC + BCA)$ und ebenso $AF = \text{tang. } \frac{1}{2}$ ∡ $(BAC - BCA)$ und der Lehrsatz erwiesen.

§. 415. cc.

III. Aufgabe. Aus zwei Seiten nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel die übrigen Stücke des Dreiecks zu berechnen.

Auflösung. I. Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 171.) AB, BC und ∡ ABC gegeben. Man sucht AC, ∡ BAC und ∡ BCA. Hier ist 180° — ∡ ABC = ∡ BAC + ∡ ACB. Daher ist $\frac{1}{2}$ ∡ $(BAC + ACB)$ und folglich auch $\text{tang. } \frac{1}{2}$ ∡ $(BAC + ACB)$ bekannt.

II. Nun setze man die Proportion: $BC + BA : BC - BA = \text{tang. } \frac{1}{2} (BAC + ACB) : x$, so ist $x = \text{tang. } \frac{1}{2}$ ∡ $(BAC - ACB)$ und man findet hierdurch den halben Unterschied der beiden Winkel BAC und ACB. Wird dieser von der halben Summe ebendieser Winkel abgezogen, so erhält man den kleinern; wird er aber zu jener halben Summe addirt, so entsteht der größere Winkel. Daher ist hierdurch auch ∡ ACB und ∡ BAC bekannt.

III. Um noch AC zu finden, setze man die Proportion:

sin. ACB : sin. ABC = AB : AC, oder auch
sin. BAC : sin. ABC = BC : AC, welches

1. $AC = \frac{\text{sin. } ABC \times AB}{\text{sin. } ACB}$, oder

2. Log. AC = Log. sin. ABC + Log. AB — Log. sin ACB; oder auch ferner:

1. $AC = \frac{\text{sin. } ABC \times BC}{\text{sin. } BAC}$, oder

2. Log. AC = Log. sin. ABC + Log. BC — Log. sin. BAC gibt.

Beispiel. IV. Es sei BC = 713°, BA = 518° und ∠ ABC = 79° 28′, so ist ∠ BAC + ∠ BCA = 180° — 79° 28′ = 100° 32′ und man hat die Proportion: 1294° : 132° = tang. 50° 16′ : tang. $\frac{1}{2}$ ∠ (BAC — BCA) d. h.

Log. 132 =	2,1205739
Log. tang. 50° 16′ =	10,0802949
	12,2008688
Log. 1294 =	3,1119343
	9,0889345

wozu als Tangente ein Winkel von 6° 59′ gehört. Daher ist ∠ BAC = 50° 16′ + 6° 59′ = 57° 15′ und ∠ BCA = 50° 16′ — 6° 59′ = 43° 17′.

Um die Seite AC zu finden, setze man:

sin. BAC : sin. ABC = BC : AC, oder auch
sin. ACB : sin. ABC = AB : AC.

§. 415. *ff.*

IV. Aufgabe. Aus den gegebenen drei Seiten eines Dreiecks die drei Winkel durch Rechnung zu finden.

Auflösung. I. Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 163.) AB, BC und AC gegeben. Man sucht die Größe von ∡ A, ∡ B und ∡ C. Hier wird durch den oben (§. 414, II. u. III.) bewiesenen Lehrsatz die Größe von BG und von GC berechnet.

II. Nun ist in dem rechtwinkeligen Dreiecke AGB, für AB als Radius und A als Mittelpunct,

AB : BG = r : sin. BAG,

wodurch ∡ BAG gefunden wird. Daher ist auch ∡ ABG bekannt.

III. Auf ähnliche Art ist in dem Dreiecke AGC, für AC als Halbmesser und A als Mittelpunct,

AC : CG = r : sin. CAG,

woraus ∡ CAG und durch ihn auch ∡ C gefunden wird.

Die Berechnung wirklicher Zahlenbeispiele dient hier zur weitern Uebung.

§. 415. *gg.*

Anmerkung. Nach diesen Vordersätzen ist es nun sehr leicht, die hier (§. 417, 419, 420.) folgenden drei Aufgaben, welche durch Hülfe der Sehnen Tafel aufgelöset worden sind, auch noch durch die trigonometrischen Hülfslinien aufzulösen, was hier übergangen werden muß.

VII. Einige andere Anwendungen dieser Lehre.

§. 416.

Erklärung. Aus der practischen Geometrie ist bekannt, wie man im Stande ist, mancherlei Entfernungen zu bestimmen, wenn die nöthigen Linien und Winkel gemessen werden können. Zu diesen Auflösungen gehört nun meist die wirkliche Construction solcher Figuren im Kleinen, welche jenen auf dem Felde ähnlich sind. Dabei sind aber, besonders wegen des Auftragens der Winkel, kleinere oder größere Fehler unvermeidlich. Diese werden durch die seither entwickelte trigonometrische Rechnungsmethode gänzlich vermieden, indem man das Aufzeichnen erspart, und das Gesuchte sogleich berechnen kann. Es wird demnach Anfängern leicht seyn, die oben (§. 331 u. f.) vorgetragenen Aufgaben auch auf diese Weise zu lösen; eine Uebung, welche von großem Nutzen ist.

Um dieses wenigstens durch einen Fall zu erläutern, wählen wir folgende Aufgabe.

§. 417.

Aufgabe. Die Entfernung zweier Gegenstände zu berechnen, zu deren keinem unmittelbar gemessen werden kann.

Es sei (Fig. 164.) AB die zu messende Linie.

Auflösung. I. Man nehme die Standlinie CD, messe sie, visire aus C nach A, B und D, und aus D nach B, A und C, und bemerke sich die Größe der Winkel o, u, y und x.

II. Aus CD, W. u und W. (x + y) berechne man BD; aus W. x, W. (o + u) und CD finde man AD. Endlich berechne man aus AD, BD und W. y die zu findende AB.

Beispiele. Es sei CD = 90′, W. o = 80° 15′, W. u = 29° 30′, W. x = 27° 45′ und W. y = 85° 30′. Wie groß ist AB?

1. Um BD zu finden, schließe man:

Sehne W. CBD : Sehne W. u = CD : BD d. h. Sehne W. 37° 15′ : Sehne W. 29° 30′ = 90′ : BD, also BD $= \frac{4924236 \times 90'}{6052940} = 73' 2'' 1'''$

2. Um AD zu berechnen, setze man:

Sehne W. CAD : Sehne W. ACD = CD : AD d. h. Sehne W. 42° 30′ : Sehne W. 109° 45′ = 90′ : AD; folglich AD $= \frac{\text{Sehne W. } 109^\circ\ 45' \times 90'}{\text{Sehne W. } 42^\circ\ 30'}$.

Da nun zwei Winkel, welche zusammengenommen 180° betragen, einerlei Sehne haben, so ist Sehne W. 109° 45′ = Sehne W. 70° 15′, und es wird AD $= \frac{9411760 \times 90'}{6755902} = 125' 3'' 8'''$

3. Nun denke man sich das Loth BE von B auf AD, so ist

Sehne W. BED : Sehne W. y = BD : BE;

folglich $BE = \frac{\text{Sehne W. } 85^\circ\ 30' \times 73'\ 2''}{\text{Sehne W. } 90^\circ} =$

$\frac{9969173 \times 732''}{10000000} = 7297'' = 72'\ 9''\ 7'''$.

Ferner wird Sehne W. BFD : Sehne W. EBD = BD : DE, folglich

$DE = \frac{\text{Sehne W. } 4^\circ\ 30' \times 73'\ 2''}{10000000} = \frac{7845 \times 732''}{10000000} =$ $5'\ 7''\ 4'''$.

Daher ist $AE = 125'\ 3''\ 8''' - 5'\ 7''\ 4''' = 119'\ 6''\ 4'''$.

Endlich findet man $AB = \sqrt{(AE^2 + EB^2)} = \sqrt{(1196^2 + 729^2)} = \sqrt{1961\ 857} = 1400'' = 140'$.

§. 418.

Anmerkung. Auch diese Fälle müssen von den Anfängern in mehreren Beispielen durchgerechnet werden; denn sie befestigen die Theorie und bilden die practische Gewandtheit.

§. 419.

Aufgabe. Die Größe eines auf dem Papiere gegebenen Winkels durch Hülfe der Sehnentafel zu messen.

Es sei (Fig. 154.) ABD der zu messende Winkel.

Auflösung. I. Wenn der gegebene Winkel ein spitzer ist, wie z. B. ABD, so nehme man zwischen seinen Schenkeln den willkührlichen Punct C, beschreibe aus ihm mit CB einen Kreis, der sie E und F schneidet, ziehe die Sehne EF und messe

sowohl den Durchmesser BG, als auch diese Sehne EF mit einerlei Maße.

II. Durch die Proportion BG : EF = 10000000 : x findet man für x die dem W. ABD zugehörige Sehne nach 10000000 Theilchen des Durchmessers, und folglich auch durch die Sehnentafel die Größe des ihr zugehörigen Winkels ABD.

III. Wäre der zu messende Winkel ein stumpfer, so construire man seinen Nebenwinkel, der ein spitzer ist. Da nun die Größe dieses spitzen Winkels nach dem Vorigen leicht gefunden wird, so ist auch das Maß des gegebenen stumpfen Winkels bekannt.

Beispiel. Zu I. Es sei BG = 36′ und EF = 25′, so setze man: 36 : 25 = 10000000 : Sehne W. ABD; folglich Sehne W. ABD = $\frac{250000000}{36}$ = 6944444. Dieses Maß in der Tafel aufgesucht, gibt W. ABB = 43° 58′.

Zu II. Hätte man nach dem vorigen Verfahren den spitzen Nebenwinkel = 43° 58′ gefunden, so wäre der gegebene stumpfe Winkel = 136° 2′.

§. 370.

Aufgabe. Vermittelst der Sehnentafel einen Winkel von gegebener Größe auf dem Papiere zu construiren.

Da dieser Winkel ein spitzer oder ein stumpfer seyn kann, so soll man z. B. den Winkel von 49° 15′ und den Winkel von 112° 30′ construiren.

Auflösung. I. Wenn an dem Endpuncte B (Fig. 154.) der geraden AB ein Winkel von 49° 15′ gelegt werden soll, so beschreibe man mit einem aus B nach der Seite des zu bildenden Winkels hingezogenen, willkührlich angenommenen, aber gemessenen Halbmesser BC aus C den Kreis BEGB.

II. Nun schließe man:

Sehne W. 90° : Sehne W. 49° 15′ = 2 BC : x. Dieses leicht zu berechnende x gibt die Größe von EF nach dem Maße, worin BC gemessen wurde. Beschreibt man nun mit dieser EF aus E einen Bogen, welcher den Kreis in F schneidet, und zieht die gerade BFD, so ist ABD = 49° 15′.

III. Um den stumpfen Winkel von 112° 30′ zu construiren, zeichne man nach dem Vorigen seinen Nebenwinkel von 67° 30′, wodurch der stumpfe Winkel leicht construirt wird.

Beispiele. Zu I. Da Sehne W. 49° 30′ = 7604060 ist, so wird, wenn BC = 20′ wäre, die Proportion diese: 10000000 : 7604060 = 40 : x,

und $x = \frac{7604060 \times 40}{10000000} = \frac{304162400}{10000000} = 30'$ $4''\ 1'''$.

Man müßte daher aus E mit dem Halbmesser von 30′ 4″ 1‴ einen Bogen beschreiben, der den Kreis in F schneidet, und nun BF ziehen.

Zu II. Für W. 112° 30′ wird die Sehne seines Nebenwinkels = 9238795 und die Proportion folgende:

10000000 : 9238795 = 40 : x, woraus x =

$$\frac{9238795 \times 40}{10000000} = \frac{369551800}{10000000} = 36' \; 9'' \; 5''$$ wird.

Diese Sehne bestimmt die Construction des Winkels von 67° 30′, folglich auch jene des Winkels von 112° 30′.

VI. Berechnung der Dreiecksebene aus ihren gegebenen drei Seiten.

§. 421.

Aufgabe. In ein gegebenes Dreieck einen Kreis zu beschreiben, der jede Seite desselben berührt.

Es sei (Fig. 165.) ABC das gegebene Dreieck, in welches der verlangte Kreis construirt werden soll.

Auflösung. Man halbire zwei beliebige Winkel des Dreiecks durch zwei gerade Linien, welche sich in demselben durchschneiden müssen (§. 70.) und fälle von diesem Durchschnittspuncte auf jede Dreiecksseite ein Loth, so ist jedes von ihnen der Halbmesser und ihr Vereinigungspunct der Mittelpunct des zu beschreibenden Kreises.

Beweis. Wenn z. B. der W. ABC und W. ACB durch BO und CO halbirt, und aus O die Lothe OP, OQ und OR gezogen worden sind, so sind die Dreiecke OPC und OQC, auch OPB und ORB congruent, folglich OP = OQ = OR.

§. 422.

Zusatz. Wird nun AO gezogen, so ist auch das Dreieck AOR dem Dr. AOQ congruent (§. 31.) und W. OAR = W. OAQ. Daher ist dieser Satz erwiesen: Wenn man in einem Dreiecke alle drei Winkel durch drei gerade Linien halbirt, so müssen sie sich innerhalb des Dreiecks in einem Puncte vereinigen.

§. 423.

Anmerkung. Als Gegensatz bemerke man hier noch diesen: Wenn man die drei Seiten eines Dreiecks halbirt, aus diesen Puncten drei Lothe errichtet, und in der Dreiecksebene gehörig verlängert, so müssen sich auch diese in einem Puncte durchschneiden, welcher von jeder der drei Winkelspitzen des Dreiecks gleiche Entfernung hat, und mit dieser Entfernung kann ein Kreis um das Dreieck beschrieben werden. (§. 126, 127.)

§. 424.

Zusatz. Daher ist (§. 108 u. 109.) jedes Dreieck einem Rechtecke gleich, dessen Grundlinie der halbe Umfang des Dreiecks, dessen Höhe der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises ist. Oder

$$\text{Dreieck } ABC = (AR + BP + CQ) \times OP.$$

§. 425.

Zusatz. I. Man verlängere CO über O, fälle aus B das Loth BM darauf, verlängere es über M, bis die über O verlängerte PO dasselbe in N schneidet, welches einmal geschehen muß, da W. MON

$< R$, weil W. POC $< R$ und daher W. CON $> R$. Nun ist das Dr. BMO dem Dr. ARO ähnlich. Denn da die drei Winkel des Dreiecks ABC zwei rechte betragen, so ist auch W. OAR + W. OBP + OCQ einem rechten gleich. Aber W. MBO + W. OBP + W. BCO $= R$ (§. 93, I.). Oder W. MBO + W. OBP + W. OCQ $= R$. Folglich ist W. OAR = W. MBO und man hat $BM : MO = AR : RO = AR : OP$.

II. Auch sind die Dreiecke BMC, BPN und OMN ähnlich, und es ist $BM : MO = BC : ON$. Da aber (nach I.) $BM : MO = AR : OP$, so ist $BC : ON = AR : OP$, folglich auch $BC \times OP = ON \times AR$. Zu beiden Producten $AR \times OP$ addirt, gibt: $(AR + BC) \times OP = PN \times AR$, oder auch $(AR + BP + CQ) \times OP = PN \times AR$. Multiplicirt man nun beiderseits durch OP, so ist $(AR + BP + CQ) \times OP^2 = PN \times AR \times OP$.

III. Da nun auch die Dreiecke BPN und OPC ähnlich sind, so ist $PN : PB = PC : PO$, folglich $PN \times PO = PB \times PC = PB \times CQ$ und es wird (nach II.):

$$(AR + BP + CQ) \times OP^2 = AR \times BP \times CQ.$$

IV. Dieser Ausdruck (in III.) läßt sich in folgendem allgemeinen Satze darstellen: In jedem Dreiecke ist das Product aus seinem halben Umfange in das Quadrat des Halbmessers des eingeschriebenen Kreises dem Producte aus den drei halben Dreiecksseiten gleich.

§. 426.

Aufgabe. Einen allgemeinen Ausdruck für die Berechnung der Dreiecksebene aus ihren drei gegebenen Seiten zu finden.

Auflösung. I. Wenn man die Summe der drei Seiten = s, den Halbmesser des in das Dreieck beschriebenen Kreises = r, und die drei Seiten = a, b und c setzt, so ist (nach §. IV.) $\frac{1}{2}$ s $\times$ r² = ($\frac{1}{2}$ s — a) $\times$ ($\frac{1}{2}$ s — b) $\times$ ($\frac{1}{2}$ s — c). Beides mit $\frac{1}{2}$ s multiplicirt, gibt $\frac{1}{4}$ s² $\times$ r² = $\frac{1}{2}$ s $\times$ ($\frac{1}{2}$ s — a) $\times$ ($\frac{1}{2}$ s — b) $\times$ ($\frac{1}{2}$ — c), und auf beiden Seiten die Quadratwurzel ausgezogen, $\frac{1}{2} s \times r = \sqrt{\left(\frac{1}{2} s \times (\frac{1}{2} s - a) \times (\frac{1}{2} s - b) \times (\frac{1}{2} s - c)\right)}$.

Da nun $\frac{1}{2}$ s $\times$ r den Inhalt des Dreiecks ABC ausdrückt, so ist

$$\triangle ABC = \sqrt{\left(\frac{1}{2} s \times (\frac{1}{2} s - a) \times (\frac{1}{2} s - b) \times (\frac{1}{2} (s - c)\right)}.$$

II. Dies gibt folgende allgemeine Regel: Um den Inhalt eines Dreiecks zu finden, ziehe man die Quadratwurzel aus einem Producte, dessen vier Factoren die halbe Summe aller Seiten, die halbe Summe weniger der ersten, die halbe Summe weniger der zweiten, und die halbe Summe weniger der dritten Seite sind.

Beispiel. Es sey a = 12′, b = 8′ und c = 10′, so ist des Dreiecks Inhalt = $\sqrt{}$ ($30/_2 \times 30/_2 - 12 \times 30/_2 - 8 \times 30/_2 - 10$) = $\sqrt{15 \times 3 \times 7 \times 5} = \sqrt{1575} = 39$ Quadratfuß 68 □ Zolle.

Dergleichen Beispiele muß der Anfänger mehrfach berechnen.

§. 427.

Zusatz. Wenn das zu berechnende Dreieck gleichschenkelig oder gleichseitig ist, so wird die Auflösung noch einfacher, wovon die Anfänger sich durch Beispiele überzeugen müssen.

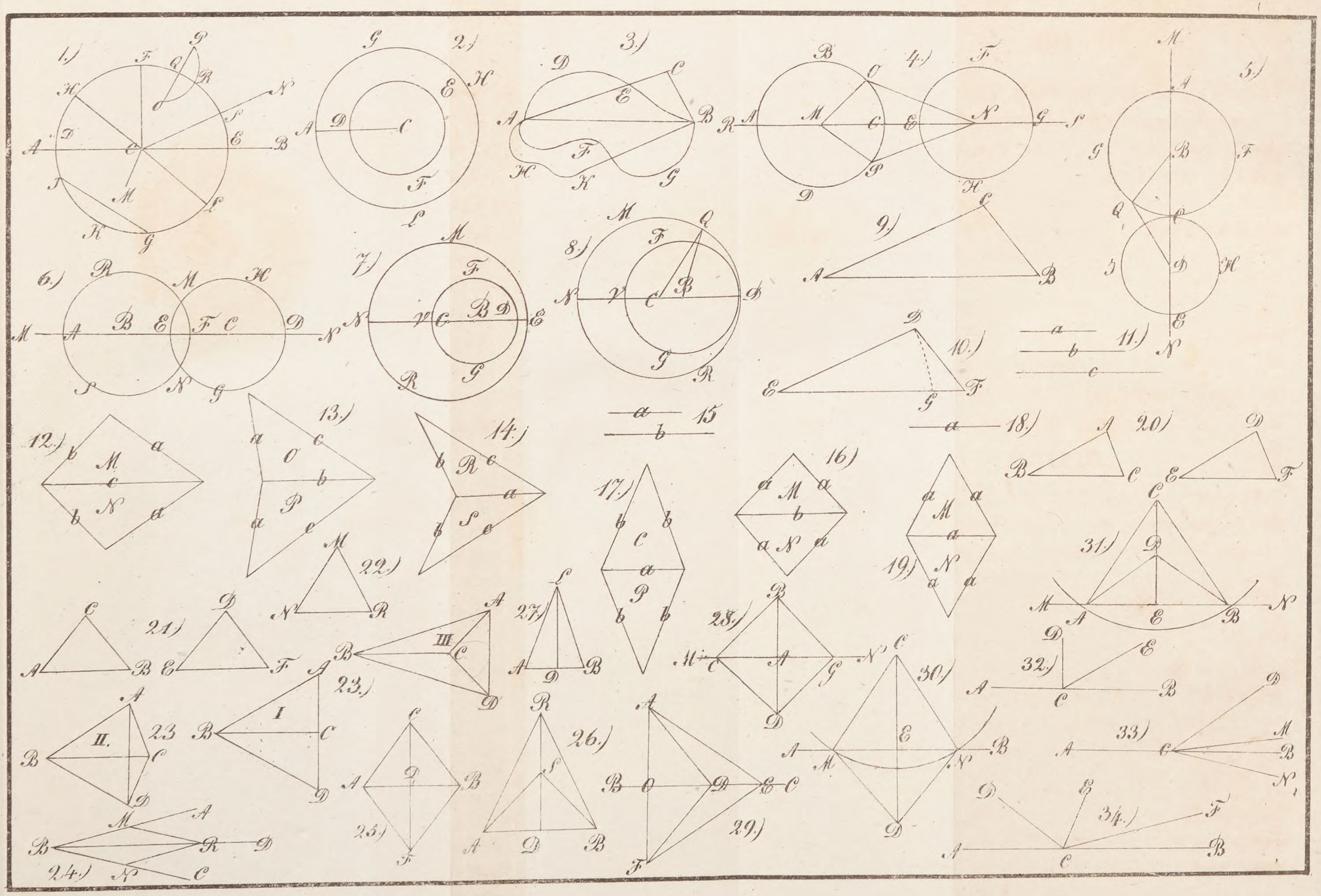
§. 428.

Anmerkung. I. Die Wichtigkeit dieser Aufgabe für die practische Geometrie muß Jedem einleuchten, und der Lehrer wird dieses durch mancherlei Beispiele erläutern. Mehrere Beweise darüber findet er in meiner Abhandlung: „Die Berechnung der Dreiecksebene aus ihren „gegebenen drei Seiten, u. s. w. Frankfurt a. M. „1813, b. Jäger.“ 24 S. 4, nebst 1 Steintafel.

II. Eine andere, dem practischen Geometer wichtige Aufgabe ist das sogenannte Pothenot'sche Problem. Wenn man die Seiten und Winkel des Dreiecks ACD (Fig. 23, III.) kennt und aus dem Puncte B die Winkel ABC und DBC gemessen hat, so soll hieraus die Größe der Entfernungen BA, BC und BD gefunden werden. — Man sehe meine Abhandlung: Das Pothenot'sche Problem und seine Aauflösungen, faßlich dargestellt u. s. w. Mainz, 1826 bei Kupferberg V. u. 44 S. gr. 8. nebst zwei Steindrucktafeln.

Mainz,
gedruckt bei Florian Kupferberg.

Fig. 1. bis 34.



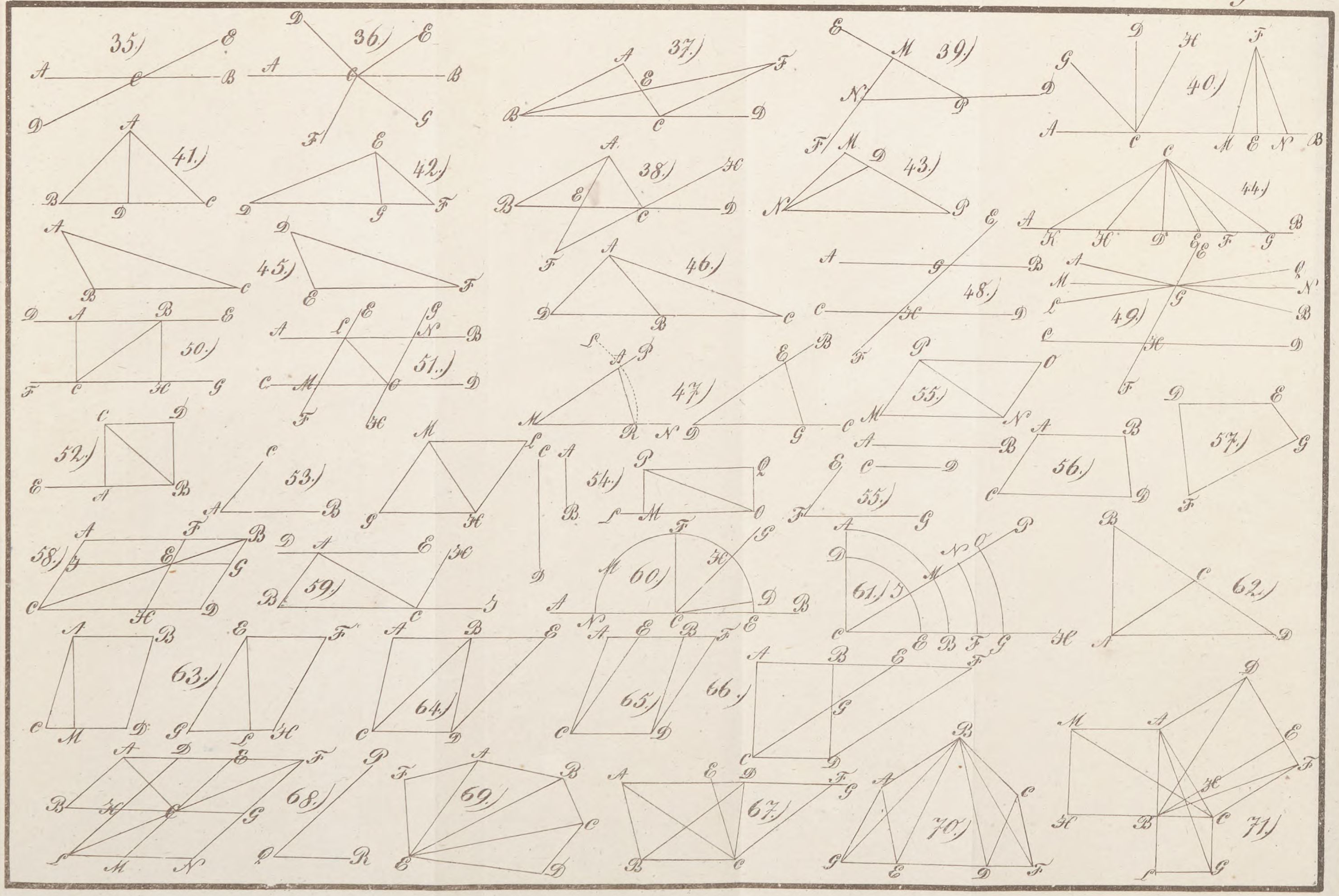
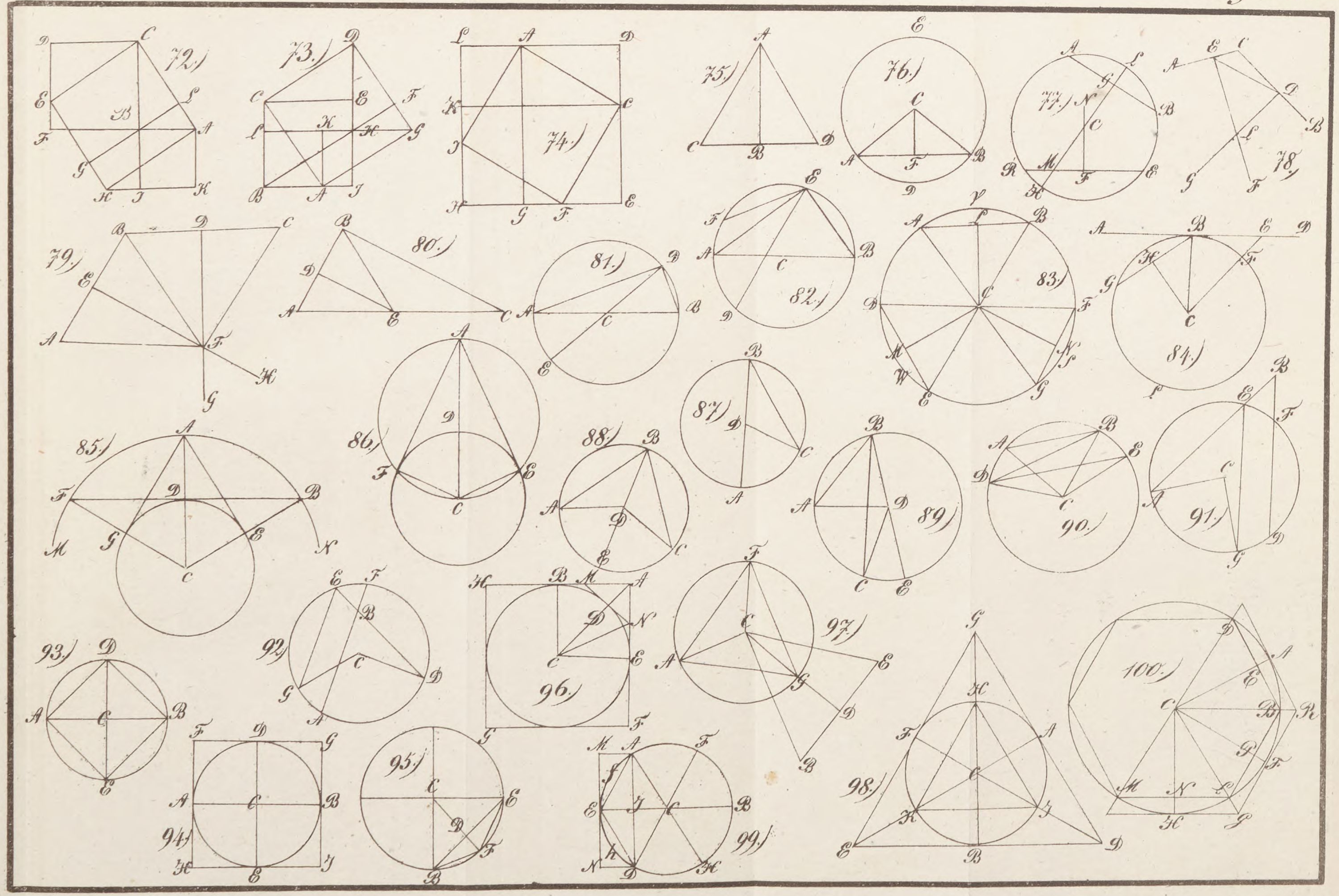
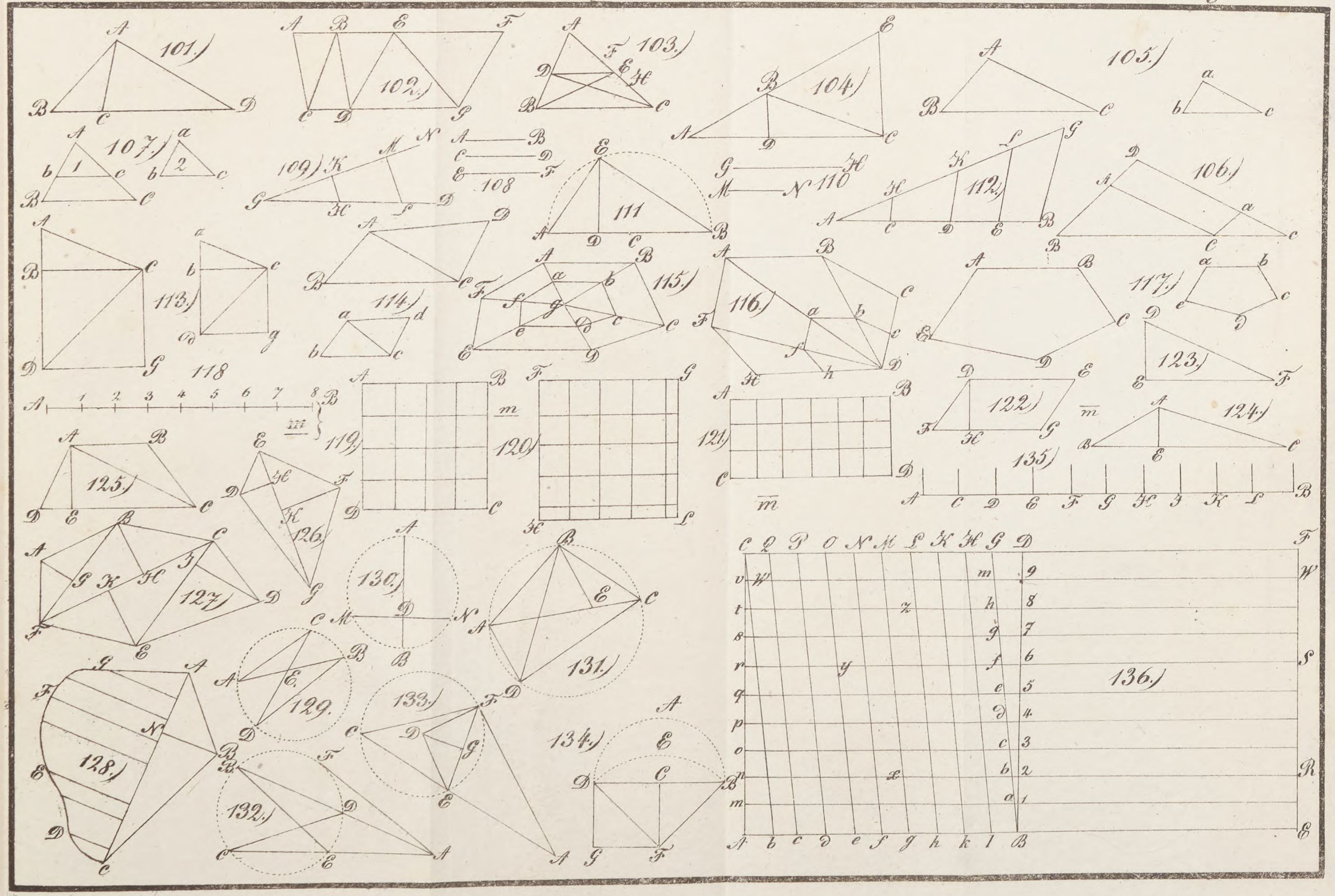
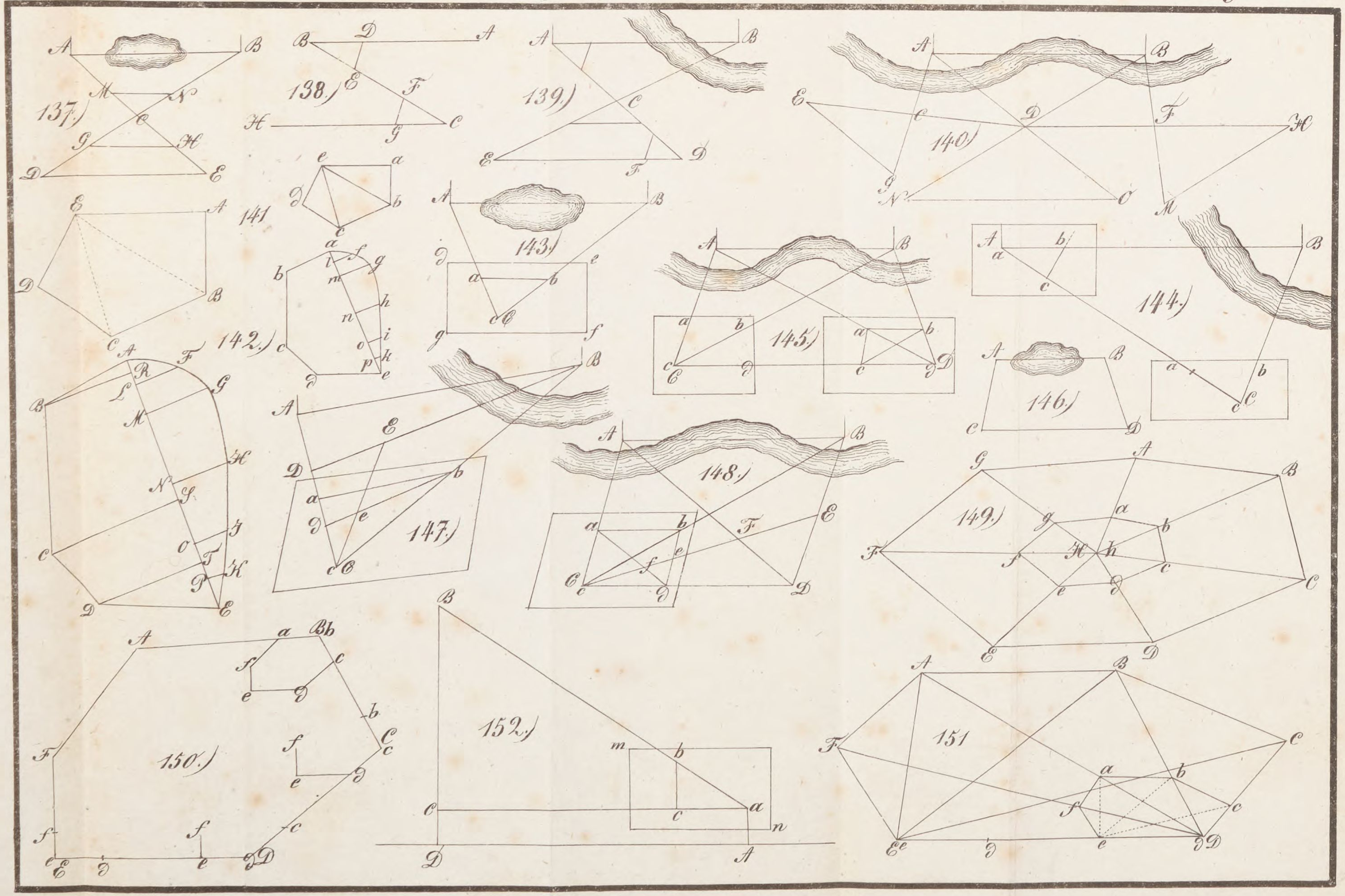
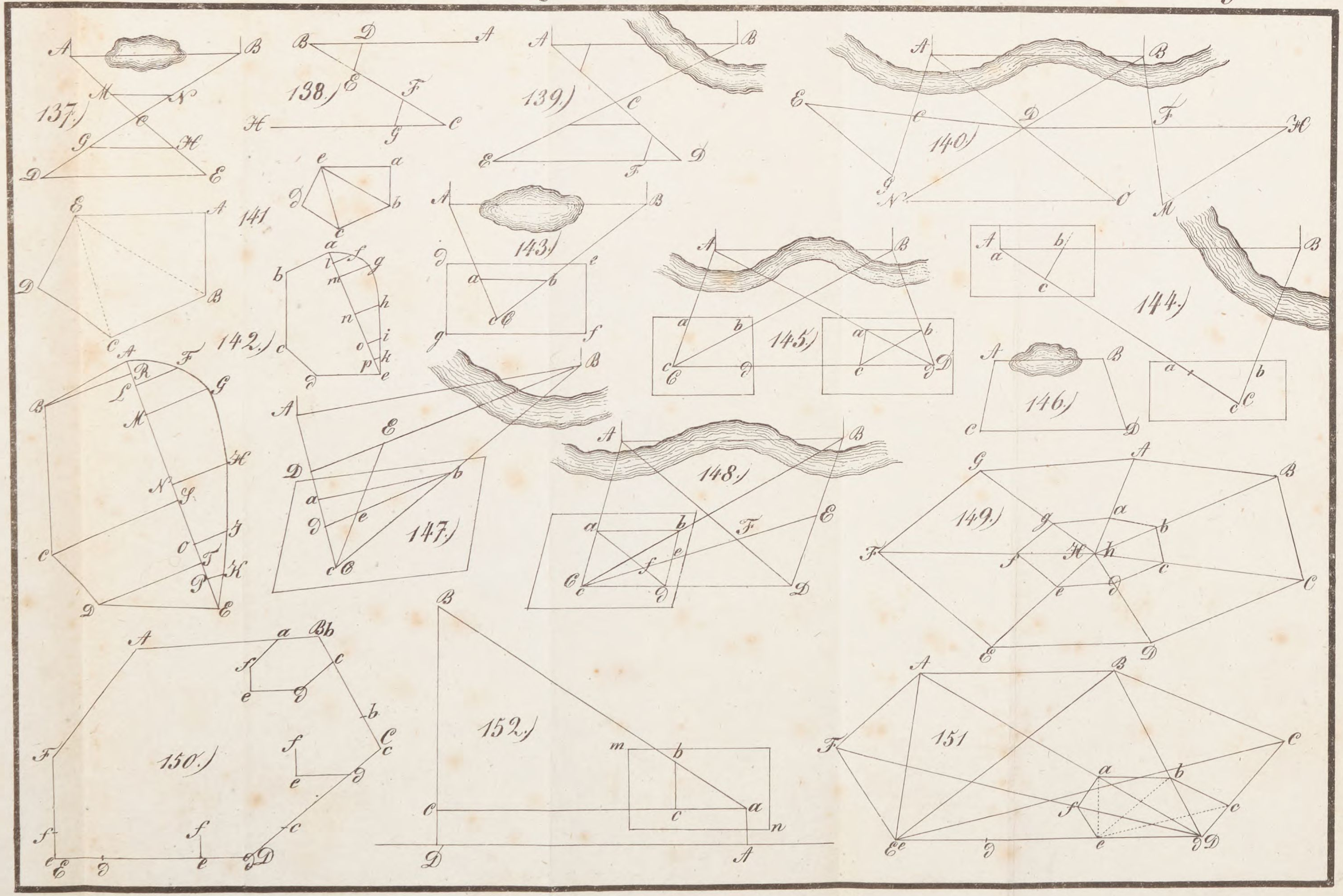

35.)
36.)
37.)
39.)
40.)
41.)
42.)
38.)
43.)
44.)
45.)
46.)
48.)
49.)
50.)
51.)
47.)
55.)
57.)
52.)
53.)
54.)
56.)
55.)
58.)
59.)
60.)
61.)
62.)
63.)
64.)
65.)
66.)
68.)
69.)
67.)
70.)
71.)

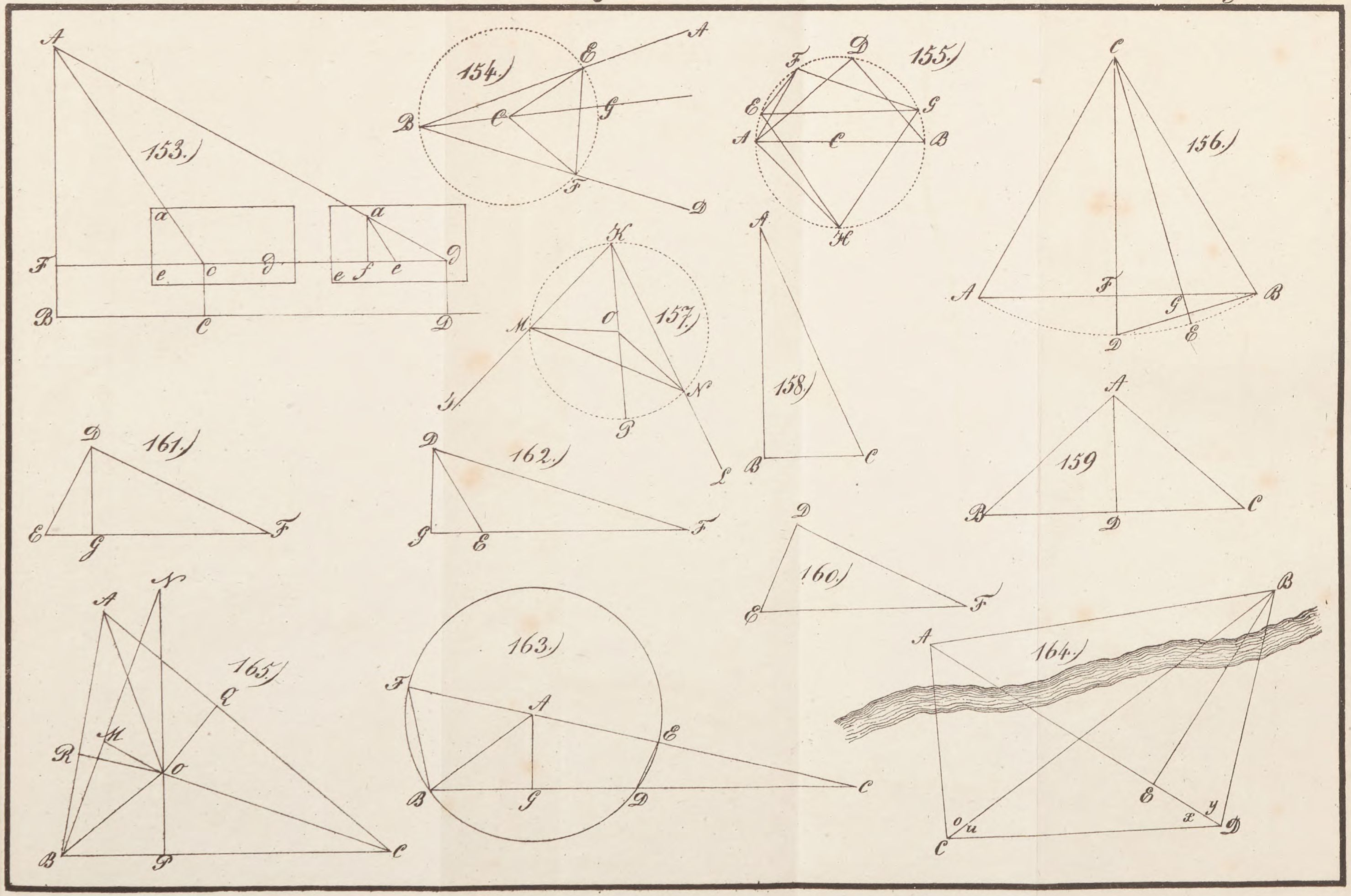
Fig: 72. bis 100. Tafel III.

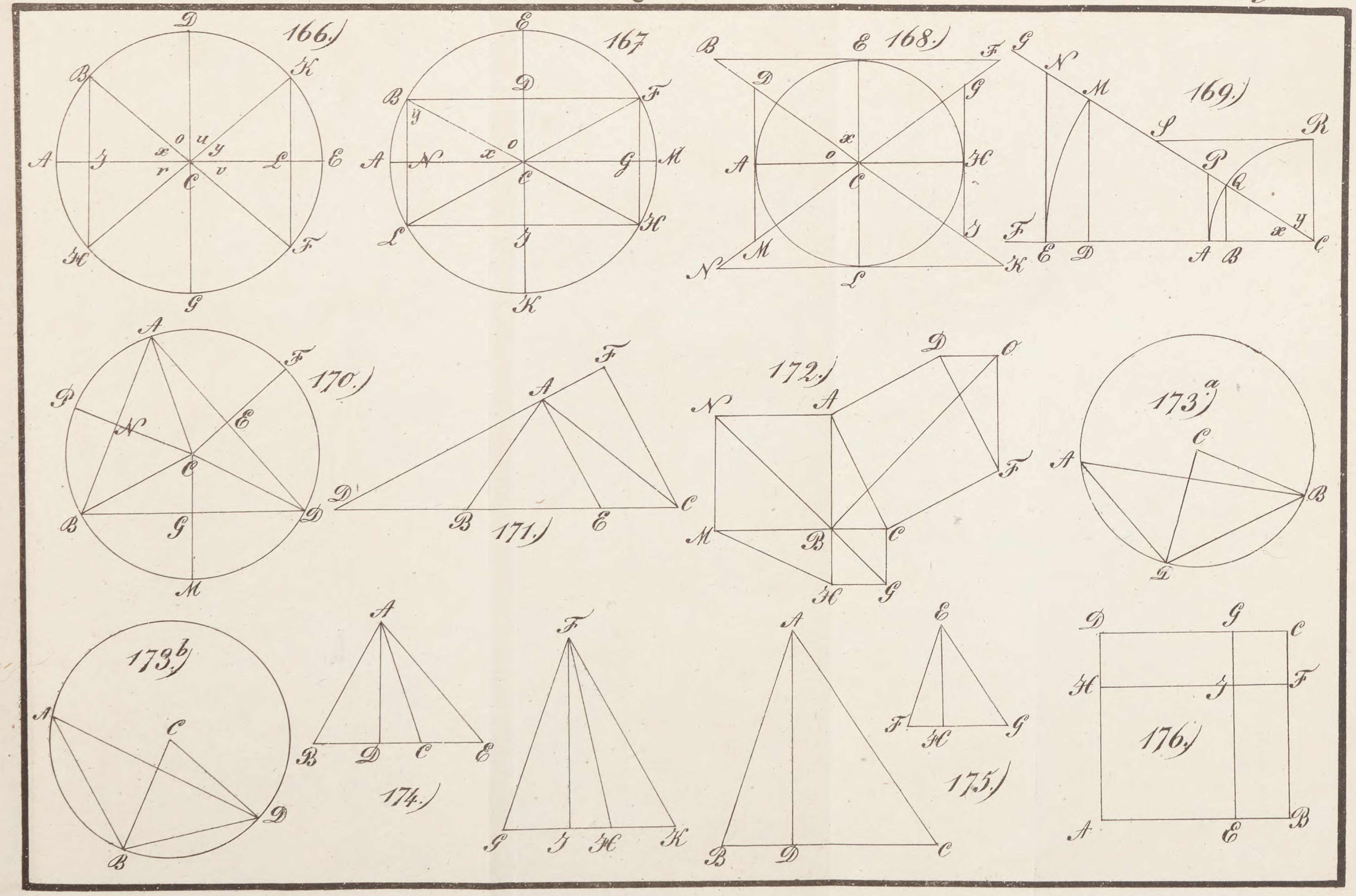







137.)
138.)
139.)
140.)
141
142.)
143.)
144.)
145.)
146.)
147.)
148.)
149.)
150.)
151
152.)


153.)
154.)
155.)
156.)
157.)
158.)
159
160.)
161.)
162.)
163.)
164.)
165.)


166.)
167
168.)
169.)
170.)
171.)
172.)
173.a)
173.b)
174.)
175.)
176.)

Hoffmann, Johann Josef Ignaz <<von>>,

Geometrische Wissenschaftslehre eine Anleitung zum leichten und grü
ndlichen Studium der Geometrie ; mit 7 Tafeln

Mainz 1826

Math.p. 224 n
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082052-5